

10. mars 2026

Oppgave 1.

a. Alle par med $b = a$ oppfyller betingelsene, fordi $a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2$. Dersom $b < a$, er $a^2 < a^2 + 2b + 1 < a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2$, men det finnes ingen kvadrattall mellom a^2 og $(a + 1)^2$. Tilfellet $a < b$ håndteres tilsvarende.

b. Alle tall på formen $n = 10^k$, med $k \geq 2$ heltallig, oppfyller betingelsene. For det første, for hver n er $S(n) \leq n^{n+1}$, siden summen som definerer $S(n)$ består av n ledd, alle mindre eller lik n^n . Spesielt, for $n \geq 2$ er $S(n) = S(n - 1) + n^n \leq (n - 1)^n + n^n < 2n^n$. Med $n = 10^k$ blir så $10^{kn} < S(10^k) < 2 \cdot 10^{kn}$, slik at første siffer i $S(10^k)$ må være 1.

Det gjenstår å få kontroll på siste siffer i $S(n)$. Siden $S(n) = S(n - 1) + n^n$, har $S(n)$ og $S(n - 1)$ samme paritet dersom n er partall, og motsatt paritet dersom n er odde. Vi ser raskt at $S(n)$ er odde dersom $n \equiv 1$ eller $n \equiv 2$ modulo 4, og partall ellers. Vi ser så på $S(n)$ mod 5. Først merker vi oss at x^y mod 5 avhenger av x mod 5 og y mod 4 (Fermats lille teorem), så n^n mod 5 bestemmes av n mod 5 og n mod 4, og gjentas derfor med periode 20. Det følger at $S(n+20) - S(n)$ mod 5 er uavhengig av n . Faktisk er $S(n+20) - S(n) \equiv 4$ mod 5, men alt vi trenger er at $S(n + 100) \equiv S(n)$ mod 5 for alle n . Det gjelder også for $n = 0$, om vi setter $S(0) = 0$, slik at rekursjonsformelen $S(n) = S(n - 1) + n^n$ gjelder også for $n = 1$. Det følger at $S(10^k) \equiv 0$ mod 5 for alle $k \geq 2$. Siden også $10^k \equiv 0$ mod 4 for $k \geq 2$, blir $S(10^k)$ et partall, og siste siffer er derfor 0.

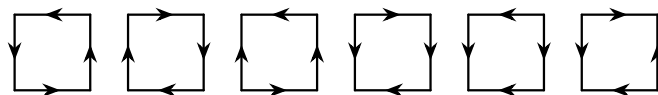
Oppgave 2.

a. Skriv s for summen av tallene på alle kortene i kortstokken. I en reduksjon erstattes $a + b$ med $b - a$ i summen, så s erstattes med $s - 2a$, og dermed har s uforandret paritet. Initielt er $s = n(n + 1)/2$, som er partall dersom $n \equiv 0$ eller $n \equiv 3$ (mod 4), og oddetall ellers. Derfor kan ikke tallet på det siste kortet være null hvis n er kongruent med 1 eller 2 modulo 4.

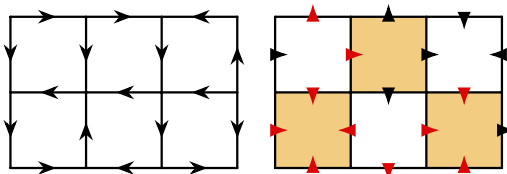
Vi kan alltid redusere fire nabokort i den opprinnelige kortstokken til ett kort med null: $(k, k + 1, k + 2, k + 3)$; $(-1, k + 2, k + 3)$; $(-1, -1)$; (0) . Det følger at vi kan ende med ett nullkort når $n \equiv 0$ (mod 4). Det gjenstår å se på tilfellet $n \equiv 3$ (mod 4). For $n = 3$ går det *ikke*: De eneste reduksjonene leder til $(-1, 3)$, $(3, -1)$, $(-1, 1)$ eller $(1, -1)$, og ender i (± 4) eller (± 2) . Men det går med $n = 7$: $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$; $(-1, 1, 4, 5, 6, 7)$; $(-2, 4, 5, 6, 7)$; $(-2, -1, 6, 7)$; $(-2, -1, -1)$; $(-1, -1)$; (0) . Dermed går det også for $n = 11, 15, 19, \dots$, siden fire kort om gangen kan reduseres til et nullkort.



b. Tilfellet $m = n = 1$ er spesielt, så vi tar det først. En enkel opptelling gir seks muligheter. Ingen av disse er venn med noen av de andre, men alle orienterte 1×1 -rutenett er venn med en av disse.

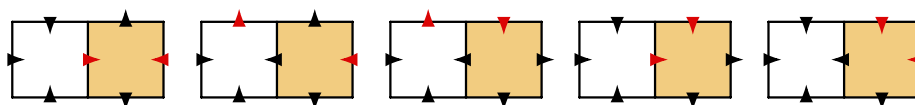
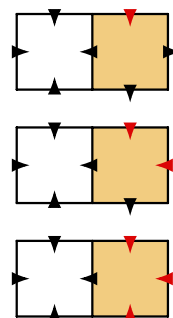


I det generelle tilfellet kan vi gjøre noen endringer: Fargelegg alle rutene i sjakkbrettmønster, og dreii alle pilene 90° mot klokken. Nå vil noen av pilene peke inn i en mørk rute og ut av en lys rute (eller bare en av delene på kanten av rutenettet). Farg disse pilene røde, og la resten være svarte. Når du roterer en rute, vil alle pilene som pekte inn i ruten fortsatt peke innover, og alle som pekte utover fortsatt peke utover, mens ruten beholder sin farge. Derfor er antall røde piler bevart. Det følger at to orienterte rutenett som er venner, har samme antall røde piler.



Omvendt skal vi vise nedenfor at (unntatt for $m = n = 1$) vil to orienterte $m \times n$ -rutenett med samme antall røde piler være venner. Et $m \times n$ -rutenett inneholder $m(n+1) + n(m+1) = 2mn + m + n$ kanter, så det er $2mn + m + n + 1$ muligheter for antall røde piler, så det er også tallet vi søker.

Vi viser først at om to orienterte 2×1 -rutenett har samme antall røde piler, er de venner. Det er trivielt sant dersom det er sju eller ingen røde piler. Vi kan anta det er flest svarte piler, ellers bare bytter vi om på retning (og farge) på alle pilene. Vi trenger altså bare se på situasjonen med én, to eller tre røde piler. Faktisk er slike rutenett venn med et av de tre orienterte rutenettene i figuren til høyre. For å se det, starter vi med et orientert rutenett med minst fire svarte piler. Vi kan da sørge for at ruten til venstre har bare svarte piler: Dersom det er en rød pil i venstre rute, rotér ruten (om nødvendig) så den røde pilen er på grenselinjen i midten, og rotér så den høyre ruten slik at en svart pil havner der i stedet. Gjenta til venstre rute er fylt med svarte piler. Dersom det er én rød pil, trengs kanskje bare en rotasjon for å få situasjonen slik som i figuren. Men om det er to røde piler, risikerer vi at disse to er på motsatte sider av høyre rute, og ingen rotasjon av høyre rute alene kan rette på det. Her er hvordan vi kan gjøre i stedet:





Rotér først høyre rute (om det trengs) så vi har situasjonen til venstre. Deretter, rotér høyre og venstre rute annenhver gang og end opp med situasjonen til høyre.

For det generelle tilfellet med $mn > 2$, kan vi tenke oss at vi bygger opp et $m \times n$ -rutenett gradvis, ved å legge til én ny rute om gangen. Start med å bygge opp nederste rad fra venstre mot høyre, så tilsvarende for andre rad, og så videre. Nå kan vi vise ved induksjon på N at to ufullstendige rutenett med $N \geq 2$ ruter har egenskapen vi søker: At to slike orienterte rutenett er venner dersom de har like mange røde piler. Vi vet at dette stemmer for $N = 2$, så bare induksjonssteget gjenstår.

Vi lar R_N være et ufullstendig (ikke orientert) rutenett for hver N , og har altså at R_{N+1} er laget fra R_N ved å legge til én ny rute r . Den nye ruten har minst en nabo i R_N . Vi antar at vi har vist resultatet for R_N , og tenker oss to forskjellige orienteringer av R_{N+1} , som gir oss to orienterte rutenett R'_{N+1} og R''_{N+1} . Nå må vi manipulere R'_{N+1} slik at vi ender opp med R''_{N+1} .

I beviset for tilfellet med $N = 2$ så vi at vi fritt kan bytte piler mellom naboruter, og dermed kan man bytte piler mellom vilkårlige ruter i et sammenhengende rutenett. Flytt nå rundt på pilene i R'_{N+1} slik at du ender opp med samme antall røde piler i ruten r i begge rutenettene. Etter det har R_N like mange røde piler i begge rutenettene, så ved induksjonshypotesen er de venner. Flytt på pilene så begge har svarte/røde piler i samme posisjon. Til sist bruker vi tilfellet $N = 2$ til å flytte om på pilene i r og en naborute, så de er identisk plassert i begge rutenett.

Oppgave 3.

a. Siden følgen består av positive heltall, har den en minste verdi a_* . Dersom $a_n = a_*$, er nå $a_n/a_{n+i} \leq 1$ for alle $i \geq 1$, så høyre side i den oppgitte formelen er automatisk mindre enn eller lik k . Dersom $a_{n+1} > a_n$, blir ulikheten streng, i strid med betingelsen. Altså må $a_{n+1} = a_n$, og det følger ved induksjon at $a_j = a_*$ for $j = n, n+1, \dots$

Anta nå at n er slik at $a_{n+1} = a_*$. Som vi har sett, er da $a_{n+i} = a_*$ for alle $i \geq 0$, og den oppgitte likheten blir $k = k(a_n/a_*)$, slik at $a_n = a_*$. Argumentet gjentatt viser at $a_j = a_*$ for $j = n-1, n-2, \dots, 1$, slik at følgen er en konstantfølge. Og en slik følge oppfylder kravet.

En nærliggende variasjon av beviset utnytter en enkel omskrivning av den gitte formelen. Vi ser at a_n blir harmonisk middel av de neste k leddene:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{a_{n+1}} + \dots + \frac{1}{a_{n+k}} \right).$$



b. Fordi identiteten

$$(a_i b_j + a_j b_i)^2 + (a_i a_j - b_i b_j)^2 = (a_i^2 + b_i^2)(a_j^2 + b_j^2)$$

alltid holder, kan likheten i oppgaven skrives $(a_i b_j + a_j b_i)^2 = (a_i a_j - b_i b_j)^2$, altså enten $a_i b_j + a_j b_i = a_i a_j - b_i b_j$ eller $a_i b_j + a_j b_i = b_i b_j - a_i a_j$. Om vi dividerer begge disse med $b_i b_j$ og innfører $c_i = a_i/b_i$, har vi enten

$$\left. \begin{aligned} c_i + c_j &= c_i c_j - 1 \\ c_i &= \frac{c_j + 1}{c_j - 1} \end{aligned} \right\} \text{ eller } \left\{ \begin{aligned} c_i + c_j &= 1 - c_i c_j \\ c_i &= \frac{1 - c_j}{c_j + 1} \end{aligned} \right. \quad (1)$$

De to ligningene i venstre alternativ er ekvivalente, og de to til høyre likeså. Dersom $c_j = 1$, gir venstre alternativ divisjon med null, mens høyre alternativ gir $c_i = 0$, som ikke er tillatt. Tilsvarende gjelder om $c_j = -1$, så verdiene ± 1 er ikke brukelige for en optimal løsning.

La oss definere funksjoner f og g ved

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad g(x) = \frac{1-x}{x+1}.$$

Det er verdt å merke seg at om $x \in \mathbb{Q}$ er forskjellig fra $-1, 0$ og 1 , er også $f(x)$ og $g(x)$ forskjellige fra $-1, 0$ og 1 . Videre er

$$f(f(x)) = x, \quad g(g(x)) = x, \quad f(g(x)) = g(f(x)) = -\frac{1}{x}.$$

Begge relasjonene i (1) kan ikke holde samtidig, fordi $f(x) = g(x)$ impliserer $x = f(f(x)) = f(g(x)) = -1/x$, som er umulig.

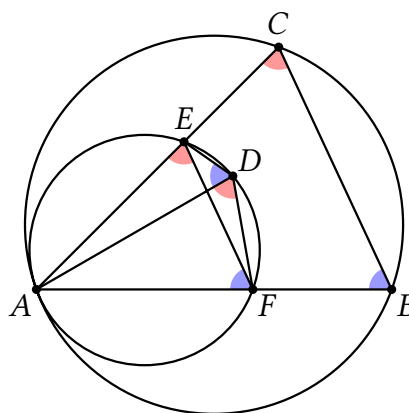
La E være mengden av uordnede par $\{i, j\}$ (med $i \neq j$) som oppfyller (1). Dette gjør $\{1, 2, \dots, 2026\}$ til hjørnene i en graf G , der E er mengden av kanter. Gitt et rasjonalt tall $c \notin \{0, 1, -1\}$, er de fire tallene $c, f(c), g(c)$ og $-1/c$ alle forskjellige, og funksjonene f og g avbilder mengden $\{c, f(c), g(c), -1/c\}$ på seg selv. Det medfører at det ikke er mer enn fire forskjellige tall c_i for i i en komponent (sammenhengende del) av G . Om c er ett av dem, deles komponenten i to deler, en del gitt ved at $c_i \in \{c, -1/c\}$ og den andre gitt ved $c_i \in \{f(c), g(c)\}$. Det kan ikke være noen kanter innenfor hver del, men alle kanter mellom de to delene er tillatt.

Vi får en maksimal graf (maksimalt antall kanter) ved å velge et fast rasjonalt tall $c \notin \{0, 1, -1\}$, dele $\{1, 2, \dots, 2026\}$ i to deler A og B , og la $c_i = c$ for $i \in A$, $c_i = f(c)$ for $i \in B$. Den resulterende grafen har en kant for hvert par (i, j) med $i \in A$ og $j \in B$. Det er $a(2026 - a)$ kanter, der a er størrelsen på A . Dette tallet er størst når $a = 1013$, så svaret er 1013^2 .

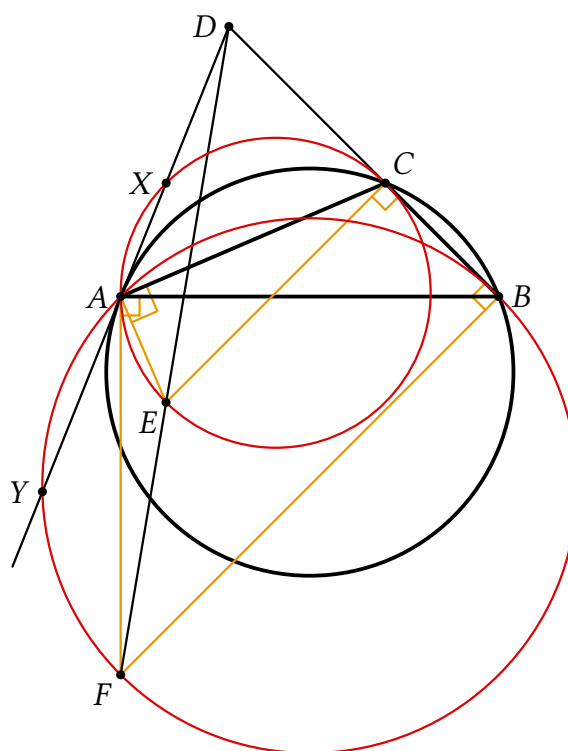


Oppgave 4.

a. Først ser vi at $\angle EDF = \angle EDA + \angle ADF = \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - \angle BAC$, så firkanten $AEDF$ er syklisk, og A ligger på omsirkelen til DEF . Videre er $\angle AEF$ og $\angle ADF$ periferivinkler som spenner over samme sirkelbue, så $\angle AEF = \angle ADF = \angle ACB$, og dermed er trekantene ABC og AFE likeformede. En homoteti gjennom A sender den ene trekanten på den andre, og dermed den ene omsirkelen på den andre, så de to omsirklene tangerer hverandre i A .



b. Trekk to sirkler (røde i figuren) med diameter henholdsvis CE og BF . Fordi $CE \perp BD$ og $BF \perp BD$, vil begge sirklene tangere BD . Og fordi $\angle CAE = 90^\circ$ og $\angle BAF = 90^\circ$, passerer begge sirklene gjennom A . Homotetien gjennom D som bringer C til B og E til F , avbilder den minste av de to sirklene til den største. Det samme må skje med skjæringspunktene med linjen DA . Dermed er $DA/DX = DY/DA$ (se figuren). Vi skriver det som $DA^2 = DX \cdot DY$. Men fordi sirklene tangerer BD , er også $DC^2 = DX \cdot DA$ og $DB^2 = DA \cdot DY$. Kombinerer vi disse likhetene, får vi $DB^2 \cdot DC^2 = DA^2 \cdot DX \cdot DY = DA^4$, dermed $DB \cdot DC = DA^2$, slik at DA tangerer omsirkelen til ABC .

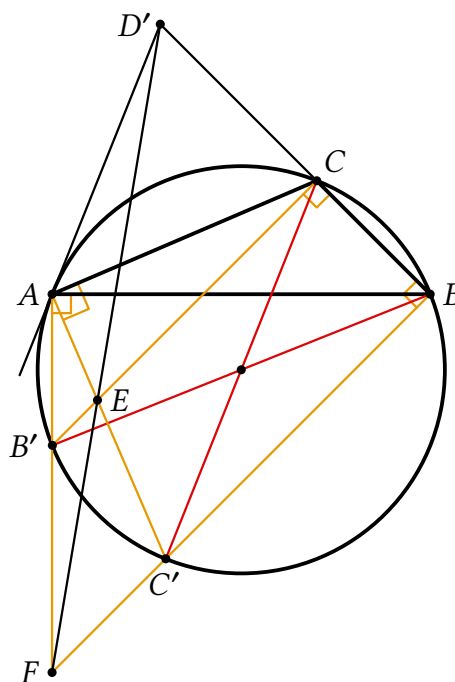




Alternativ løsning: Vi kan benytte *Pascals teorem*,¹ som sier at dersom alle seks hjørner i en sekskant $ABCDEF$ ligger på en sirkel, så ligger de tre skjæringspunktene $AB \cap DE$, $BC \cap EF$, $CD \cap FA$ på linje. (Her står $AB \cap DE$ for skjæringspunktet mellom linjene AB og DE .) Det er viktig å være klar over at punktene A – F ikke behøver å ligge i noen bestemt rekkefølge på sirkelen. Det er vanlig å illustrere teoremet med punktene i rekkefølgen A, D, B, F, C, E og tilbake til A , slik at skjæringspunktene havner på innsiden av sirkelen, men det er på ingen måte nødvendig. En annen ting å merke seg er at om nabopunkter A og B faller sammen, lar vi linjen AB (som vi skriver AA !) være tangenten til sirkelen i A , og teoremet gjelder fortsatt.

Pascals teorem er mye mer generelt: Det gjelder ikke bare for sirkler, men for kjeglesnitt generelt – altså også for ellipser, hyperbler og parabler. Ikke bare det, teoremet lever mest komfortabelt i *prosjektiv geometri*, hvor det ikke er forskjell på de forskjellige typene kjeglesnitt. Og hvis du lurer på hva som skjer dersom noen av linjeparene i teoremet er parallelle, så har projektiv geometri et svar på det òg: Slike linjer møtes i et uendelig fjernt punkt. Projektiv geometri kan virke veldig abstrakt, men er absolutt verdt et studium.

Vi lar nå B' og C' være de *antipodale* punktene til B og C , det vil si at BB' og CC' (røde i figuren) er diametre i omsirkelen til ACB . Vi anvender så Pascals teorem på sekskanten $AAC'BCB'$ – i den rekkefølgen. Det betyr at vi skal se på de tre skjæringspunktene $AA \cap BC$, $AC' \cap CB'$, $C'B \cap B'A$. Som nevnt er « AA » tangenten i A . Den skjærer BC i et punkt vi vil kalle D' . Vi skal vise at $D' = D$. Fordi CC' er en diameter og A ligger på randen av sirkelen, er $\angle CAC' = 90^\circ$. Siden også $\angle CAE = 90^\circ$, ligger A, E og C' på linje. Derfor er $AC' \cap CB' = E$. Tilsvarende er $AB' \cap BC' = F$. Pascals teorem sier så at D', E og F ligger på en rett linje, men det betyr i sin tur at $AA \cap BC = D'$, med andre ord, $D' = D$, det vil si D ligger på linjen FE .



Ivar Lee Fevang løste oppgaven med denne metoden i finalen.

¹Se *Pascal's theorem* i engelskspråklig Wikipedia.