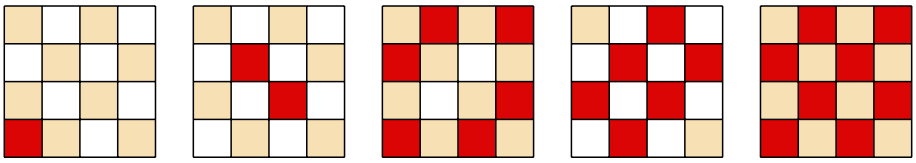
Niels Henrik Abels matematikkonkurranse
Første runde 2026–2027 – *Løsninger*

12. november 2026

Oppgave 1. Alle lengdene uttrykt i meter: $A = 1000\,\text{m}$, $B = 2000\,\text{m}$, $C = 300\,\text{m}$, $D = 40\,\text{m}$, $E = 20\,\text{m}$. . . . . **E**

Oppgave 2. I figuren vises mulige posisjoner i rødt for springeren etter 0, 1, 2, 3 og 4 sprang. Det hjelper litt å huske på at om man fargelegger brettet i vanlig sjakkbrettmønster, vil hvert sprang flytte springen fra en hvit rute til en farget rute, eller omvendt. Symmetrien om diagonalen mellom nedre venstre og øvre høyre hjørne hjelper også. . . . . **B**

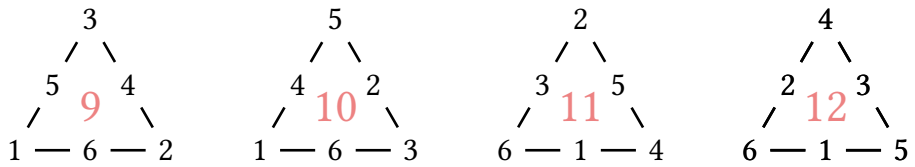


0 sprang 1 sprang 2 sprang 3 sprang 4 sprang

Oppgave 3. Vi regner ut alternerende tverrsum for alle tallene: **A**: $-3+8-2+7-3+9-4+2 = 14$; **B**: $5-4+8-3+4-7+9-3+8 = 17$; **C**: $7-3+6-1+9-8+2-3+9 = 18$; **D**: $9-3+2-4+9-2+3-8 = 6$; **E**: $-1+4-1+7-1+2-1+1-2+3 = 11$. Bare den siste er delelig med 11. **E**

Metoden med alternerende tverrsum fungerer fordi hvert av tallene 1, 100, 10000, ... har rest 1 når du deler på 11 (for eksempel $10000 = 9999 + 1 = 11 \cdot 909 + 1$), og fordi tallene 10, 1000, 100000, ... har rest $10 = 11 - 1$ når du deler på 11 (for eksempel $100000 = 99990 + 10 = 11 \cdot 9090 + 10$).

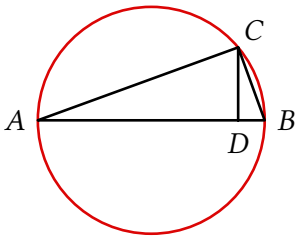
Oppgave 4. La m være summen av de tre tallene i hjørnene av figuren. Legg sammen tallene langs én side, legg til de langs neste side, og så den siste siden: Da har vi lagt sammen alle tallene fra 1 til 6 (summen er 21), men de i hjørnene har vi lagt til to ganger, så resultatet er $3n = 21 + m$. Men da er m delelig med 3, så vi må ha $m = 6$, 9, 12 eller 15 (fordi $m \geq 1 + 2 + 3 = 6$ og $m \leq 4 + 5 + 6 = 15$). Disse fire mulighetene for m gir fire muligheter for n.



Og her ser vi at alle mulighetene er gjennomførbare. . . . . **D**

Oppgaven har en naturlig symmetri: Om du erstatter hvert tall k med $7 - k$ i løsningene til venstre, får du løsningene til høyre.

Oppgave 5. Vinkelen BCA er rett (Tales' teorem). Dermed er trekantene ABC og CBD likeformede, så $BC/AB = BD/BC$, altså $(BC)^2 = AB \cdot BD = (AD + BD) \cdot BD = 150 \cdot 6 = 900$. . . . . **E**

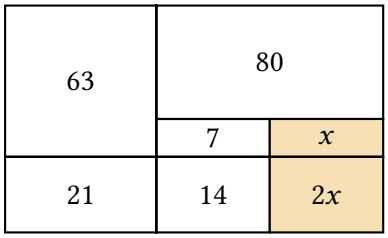


Figuren har feil proporsjoner for å gjøre den lettere å lese.

Oppgave 6. Vi skal ta gjennomsnittet av siste siffer for n^2, for $n = 1, \ldots, 100$. Men dette siste sifferet avhenger bare av siste siffer i n, så det gjentar seg periodisk, og vi trenger bare se på $n = 1, \ldots, 10$. Siste siffer blir 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0, med sum 45 og gjennomsnitt 4,5. . . . . **A**

Oppgave 7. Når $n \geq 4$, er $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot n$ delelig med $3 \cdot 4 = 12$. Dermed er hele summen $4! + \cdots + 100!$ delelig med 12, og resten blir $1! + 2! + 3! = 1 + 2 + 6 = 9$. . . . . **D**

Oppgave 8. Del det skyggelagte rektangelet i to, med areal henholdsvis x og $2x$ (forholdet må være $7 : 14 = 1 : 2$, som vi ser ved å sammenligne med de to rektanglene ved siden av). På samme måte sammenligner vi de to rektanglene til venstre med de to sammensatte rektanglene til høyre for seg, og konkluderer at $80 + 7 + x = 3(14 + 2x)$, slik at vi har $5x = 87 - 3 \cdot 14 = 45$, og arealet av det skyggelagte rektangelet er $3x = 27$. . . . . **B**

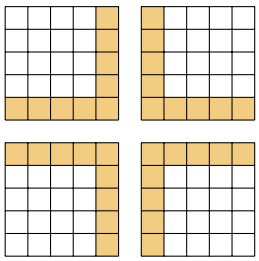


Oppgave 9. Om en kaffe koster k, en skolebolle s, et wienerbrød w og en te t, har vi $A : k + s = 96$, $B : k + w = 100$ og $C : t + w = 107$. Herav $A - B + C : t + s = 103$.

Alternativ løsning: Fra Anne og Bente lærer vi at et wienerbrød koster fire kroner mer enn en skolebolle. Derfor må David betale fire kroner mindre enn Carl. . . . . **C**

Oppgave 10. Funksjonene i **A**, **D** og **E** har ingen positive nullpunkt, så de er utelukket. Funksjonen i **C** er $f(x) = 2(x-1)^2$, som bare har nullpunktet $x = 1$. Da gjenstår $2x^2 - 4x + 1 = 2(x-1)^2 - 1$, med nullpunktene $1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$, og det kan passe. . . . . **B**

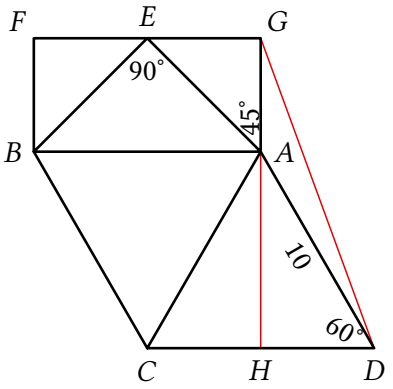
Oppgave 11. Det er tjue valg av representant for hver av seks klasser, det er tilsammen $20^6 = 2^{12} \cdot 5^6$ muligheter. For hvert av disse valgene er det to mulige valg av leder, så vi må gange med 2. . . . . **B**

Oppgave 12. 
Summen av tallene i rutene *utenfor* de fire delkvadratene må også være den samme (se figuren). Om du legger sammen summen av tallene i de fargelagte rutene i figuren oppe til venstre og den nede til høyre, får du summen av alle tallene i rutene langs kanten, med tallet i to motsatte hjørner dobbelt opp. Det samme skjer om du legger sammen tallene fra de andre to figurene. Men da er $a+b=c+d$, der to motsatte hjørner har tallene a og b og de andre to hjørnene har tallene c og d. La oss si at a, b, c er 4, 12 og 19 i en eller annen rekkefølge. Siden $1 \le d \le 25$, må $1 \le a+b-c \le 25$. Vi har tre valg for c, og bare ett av dem ($c=12$) passer i ulikheten, da med $a+b=4+19$, og det gir $d=4+19-12=11$. . . . . **B**

Oppgave 13. Fra figuren ser vi at den lengste kateten i småtrekantene er dobbelt så lang som den korteste. Det samme gjelder da også den store trekanten, siden den er likeformet med de små. Hvis den korteste kateten har lengde a, er arealet $\frac{1}{2}a\cdot 2a = a^2 = 80$, og hypotenusen har lengde $\sqrt{(2a)^2+a^2} = \sqrt{5a^2} = \sqrt{5\cdot 80} = 20$. . . . . **B**

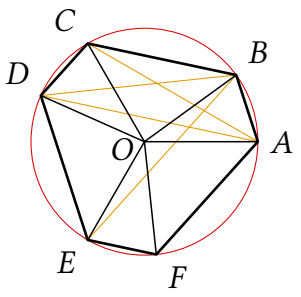
Oppgave 14. De eneste trekantene i figuren er rettvinklede trekanter med hypotenus langs diagonalen. Hvert valg av to skjæringspunkter mellom diagonalen og de andre linjene gir to slike trekanter med hjørne i de to punktene. Det er seks slike punkter, så det er $\frac{6\cdot 5}{2} = 15$ par å velge i, og så ganger vi altså med 2. . . . . **B**

Oppgave 15. Fordi $AD=CD$ og $\angle ADC = 60^\circ$, er trekanten ACD likesidet, og siden også ABC er likesidet, er $AB=10$. Fordi $AE=EB$ og $\angle AEB = 90^\circ$, er $\angle EAB = \angle EBA = 45^\circ$. Videre, fordi $\angle EAG = 45^\circ$ og $AG=GE$, har også trekanten AGE vinkler 45°, 90°, 45°. Det gjelder også BFE. Det følger at $ABFG$ er et rektangel, og $AG = \frac{1}{2}FG = \frac{1}{2}AB = 5$. La H være midtpunktet på CD. Så er $\angle BAH = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$, så linjestykket AH er en forlengelse av GA. Dermed er $GH = GA + AH = 5 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot 10 = 5(1+\sqrt{3})$, mens $HD=5$, så Pytagoras gir oss $(DG)^2 = 5^2 + (5(1+\sqrt{3}))^2 = 5^2(5+2\sqrt{3})$. . . . . **B**



Oppgave 16. Om vi trekker fra $A00A$ på begge sider og flytter HA over på den andre siden, blir Lenes regnestykke redusert til $BB0 + A = QU0 + HA$. Vi kan forenkle mer: Trekk fra A på begge sider, og del på 10, med resultat $BB = QU + H$. Kanskje er et bedre å skrive det på formen $BB = Q0 + (U + H)$. Vi må ha $B > Q$ (siden $B = Q$ ikke er tillatt), og faktisk $B = Q + 1$ fordi $U + H < 18$. Vi kan nå trekke fra $Q0$ på begge sider i ligningen, og får $1B = U + H < 18$, slik at $B < 8$ og $Q = B - 1 < 7$. Og $Q = 6$, $B = 7$, $U = 8$ og $H = 9$ kan passe, for eksempel med $A = 1$: $1771 + 1 - 91 = 1681$ . . . . . **B**

Oppgave 17. Like lange sider må spenne over like stor del av sirkelbuen, så la oss si $\angle AOB = \angle COD = \angle EOF = u$ og $\angle BOC = \angle DOE = \angle FOA = v$, der O er sentrum i sirkelen. Siden summen av alle seks vinkler er 360°, er $u + v = 120^\circ$. Nå benytter vi at en sentralvinkel er dobbelt så stor som en periferivinkel som spenner over samme bue: $u = \angle COD = 2\angle CAD = 36^\circ$, og dermed $v = 120^\circ - 36^\circ = 84^\circ$. Vi får $\angle DBE = \frac{1}{2}\angle DOE = \frac{1}{2}v = 42^\circ$. . . . . **D**



Oppgave 18. Her er $2025 + 2026 \cdot 2116 = 45^2 + (2071 - 45)(2071 + 45) = 2071^2$, så svaret er $(2071 - 2026)^2 = 45^2 = 2025$. . . . . **A**

Oppgave 19. Før vi ser på svaralternativene, noterer vi at n objekter kan ordnes i rekkefølge på $n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n$ måter. Spesielt har Arne skrevet opp $5! = 120$ tall. Men heller enn å finne ut hvor mange tall av hver type, ser vi på hvilken *brøkdel* av de 120 tallene er av gitt type:

A: Ett av fem tall har 5 først. Brøkdel $\frac{1}{5}$.
B: De av tallene som er delelig med 4, ender på sifrene 12, 24, 32 eller 52. Det er i alt $5 \cdot 4 = 20$ muligheter for de to siste sifrene. Brøkdel $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$.
C: Bare de tallene som ender på 5 er delelige med 5. Samme resonnement som for **A** leder til brøkdel $\frac{1}{5}$.
D: Det er $3! = 6$ måter å ordne sifrene 1, 3 og 5 i rekkefølge på. Brøkdel $\frac{1}{6}$.
E: Tilsvarende resonnement som for **D**: Annethvert tall har 5 til høyre for 4, og annethvert av de har 2 til venstre for 1. Det gir brøkdel $\frac{1}{4}$. . . . . **E**

Oppgave 20. Karl Erik kan ikke få summen 24, for da ville n^2 være delelig med 3 men ikke med 9. De øvrige kan faktisk oppnås: $3^2 = 9$, $13^2 = 169$, $24^2 = 576$ eller $99^2 = 9801$, $999^2 = 998001$. . . . . **D**

Her ser du kanskje et mønster: $99\ldots9^2 = (10^k - 1)^2 = 10^{2k} - 2 \cdot 10^k + 1$ har tverrsum $9k$. Kvadratet skrives med $k - 1$ niere, en åtter, $k - 1$ nuller og en ener til slutt.