



## Kommutativ egenskap – oppgaveideer

En grunnleggende basisferdighet i matematikk er å kjenne den kommutative egenskapen og gjøre seg nytte av den i egnede situasjoner, for eksempel å kunne bytte om rekkefølgen på tallene når en skal legge sammen et lite og et stort tall. Kunnskap om den kommutative egenskapen kan hjelpe elever med å utvikle sine regnestrategier, og av den grunn bør elever få utforske hva det betyr å bytte rekkefølge, formulere det de finner ut, drøfte og forstå for å kunne bruke denne egenskapen hensiktsmessig så tidlig som mulig i skoleløpet. Målet er at elevene skal vite hva egenskapen innebærer, gjenkjenne kommutativitet, og vite hvordan den kommutative egenskapen kan utnyttes i eget arbeid med regneartene. Elevene skal vite når den kommutative egenskapen kan anvendes, når den ikke kan anvendes og hvorfor det er slik.

Argumenter for at det er en fordel at elever lærer å bruke den kommutative egenskapen tidlig i skoleløpet er blant andre:

- Elever som utforsker sentrale matematiske ideer, vil oppleve en mindre *fragmentert* læring. Det å oppdage viktige sammenhenger fra tidlig alder vil hjelpe elevene til å se ulike matematiske ideer og emner som deler av en helhet.
- Å forstå når og for hvilke regneoperasjoner den kommutative egenskapen gjelder og er nyttig å bruke, og ikke minst når den ikke gjelder, kan avhjelpe at enkelte elever tror de kan trekke det minste tallet fra det største i subtraksjon. Mange elever tror de kan regne ut  $46 - 19$  ved å ta  $4 - 1$  og  $9 - 6$ , så svaret blir 33.
- Elever med en god forståelse av den kommutative egenskapen, vil kunne anvende dette i sin *strategiutvikling*. Hvis strategien elevene har for addisjon er «å telle videre oppover», vil regnestykker som  $4 + 9$  gjøre det enklere å telle videre fra 9 enn å telle fra 4. For å finne svaret i multiplikasjon, er det fint å vite at  $10 \cdot 5$  gir samme svar som  $5 \cdot 10$ .
- Kunnskap om grunnleggende egenskaper ved regneoperasjoner (for eksempel kommutativ egenskap) fremmer relasjonell forståelse. Å bygge opp begrepsmessige strukturer og se sammenhenger reduserer antall fakta, regler og formler som elevene må memorere.

Når vet vi at elevene behersker denne egenskapen?

Som lærer ser man ofte at elever tar i bruk den kommutative egenskapen, for eksempel i arbeidet med tier-venner, og man kan fort ledes til å tro at dette har elevene forstått. Men det er et betydelig sprang i utviklingen fra elevene viser spor av forståelse for den kommutative egenskapen til de behersker og nyttiggjør den. Dette er viktig for lærere å være oppmerksomme på, slik at de tar hensyn til det i sin undervisning, både når de konkret jobber med den kommutative egenskapen, og i sammenhenger hvor den kommutative egenskapen dukker opp på et senere tidspunkt eller i andre sammenhenger. Det å synliggjøre og løfte frem slike sentrale matematiske ideer i undervisningen over tid vil være til stor hjelp for elevene. Da legger man til rette for *dybdelæring*.



## Addisjon

1. Bruk en kleshenger og fest et antall klyper på den tversoverliggende stanga. Del klypene i to grupper med ulikt antall klyper i hver gruppe, og be elevene lage et regnestykke til det de ser. Eksempelet nedenfor viser  $3 + 5 = 8$ . Roter kleshengeren 180 grader. Be elevene skrive et nytt regnestykke for det de nå ser.



$$3+5=8$$



$$5+3=8$$

Gjenta aktiviteten med et annet antall klyper. To og to regnestykker hører sammen. Etter noen eksempler, spør du elevene hva de har lagt merke til i de parvise regnestykkene. Hva er likt og hva er ulikt? Rekkefølgen på leddene er forskjellig, men summen er den samme. Hjelp og støtt elevene i å uttrykke den kommutative egenskapen på sin måte.

La elevene undre seg over om denne egenskapen vil gjelde for andre tall som de har regnet ut. Hvordan kan man vite det uten å ha prøvd? Hvordan være helt sikkert? Kan elevene på sin måte uttrykke eller bevise at den kommutative egenskapen gjelder for andre tall enn de som er prøvd? Gjelder det for store tall, for alle tall?

Når gjelder den kommutative egenskapen ikke?

2. Når elever skal lære et begrep bør de også arbeide med situasjoner hvor det å bytte rekkefølge ikke vil gi det samme resultatet. Som en introduksjon kan læreren trekke fram rekkefølgen på to hendelser i fra dagliglivet og få elevene til å diskutere om rekkefølgen har en betydning for resultatet eller ikke. Her er noen eksempler:
  - Ta på deg den høyre skoa før du tar på den venstre skoa. Har det noen betydning om du tar på deg den venstre skoa di før du tar på deg den høyre? Blir sluttresultatet det samme?
  - Ta på deg sokkene før du tar på deg skoene. Har det noen betydning om du tar på deg skoene før du tar på deg sokkene? Blir sluttresultatet det samme?

<sup>1</sup> Flere av ideene er hentet og oversatt fra:

Cathcart, G. W., Pothier, Y. M. m. fl. (2011): «Learn mathematics in elementary and middle schools. A learner-Centered approach.



La elevene finne på andre eksempler som viser at rekkefølgen ikke har betydning for sluttresultatet, og andre eksempler hvor rekkefølgen har betydning for sluttresultatet.

Når elevene har lekt seg med eksempler fra dagliglivet der rekkefølgen av og til er viktig og andre ganger ikke er viktig, kan dette overføres til regneoperasjoner og den kommutative loven eller egenskapen. Dette gjelder alltid for addisjon og multiplikasjon, men ikke for subtraksjon og divisjon.

Å forstå når og for hvilke regneoperasjoner den kommutative egenskapen gjelder og ikke, kan forebygge misoppfatningen om at man alltid kan trekke det minste tallet fra det største i subtraksjon. I subtraksjon har rekkefølgen på tallene i et regnestykke betydning for resultatet. Dette kommer enda klarere fram når elevene skal arbeide med negative tall. Løft fram noen subtraksjonseksempler og la elevene undersøke og diskutere disse. Diskuter deretter elevenes erfaringer om den kommutative egenskapen gjelder for subtraksjon. Når rekkefølgen endres, for eksempel i regnestykket  $6 - 2$ , vil det ikke gi det samme resultatet som  $2 - 6$ . Svaret blir bare det samme hvis tallene som skal subtraheres er like. Da blir svart null.

## Oppsummering sammen elevene

3. Kan den kommutative egenskapen være til hjelp når vi skal regne ut oppgavene nedenfor? Hvordan og hvorfor, eventuelt hvorfor ikke? Du som lærer kan presentere oppgavesettet for elevene og stille et lignende spørsmål. Be elevene velge ut de oppgavene de kan bruke den kommutative egenskapen for å løse og be de forklare hvorfor. For hvilke oppgaver ser ikke elevene nytte av å bruke den kommutative egenskapen? Hvorfor ikke? For hvilke av oppgavene kan den ikke brukes? Her er det ikke nødvendig å finne svaret på oppgavene. Hensikten er å gjøre elevene bevisst på at den kommutative egenskapen i visse sammenhenger kan brukes som en regnestrategi og gjøre utregninger enklere. Det er viktig å lytte til elevenes resonnement og argumentasjon.

$$4 + 9$$

$$23 + 37$$

$$17 + 50$$

$$19 + 3$$

$$7 + 203$$

$$9 - 13$$

$$53 + 10$$

$$21 - 10$$

$$7 + 49$$