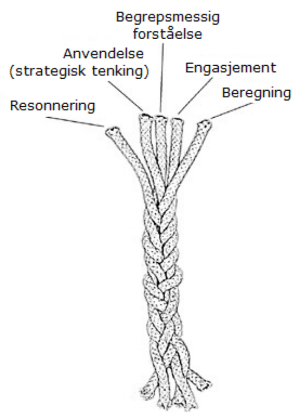
Kjernepraksiser i ambisiøs matematikkundervisning

DESEMBER 2017

Svein H. Torkildsen
NTNU

Innhold

Ambisiøs matematikkundervisning

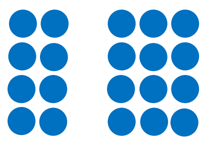


Målet med matematikkundervisningen i skolen er at elevene skal utvikle en bred matematisk kompetanse som er karakterisert ved begrepsmessig forståelse, fleksibilitet i beregninger, resonnering, anvendelse og engasjement (National Research Council, 2002). Dette målet er både kognitivt og sosialt utfordrende og fører til en mer krevende form for undervisning for alle elever på alle nivå. Denne ambisiøse matematikkundervisningen bygger på fem grunnleggende prinsipper og seks kjernepraksiser som beskrives i denne artikkelen. (Kazemi, Cunard, Crowe, 2012).

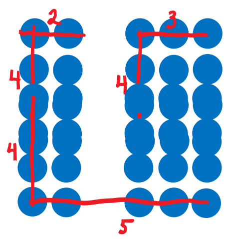
Kjernepraksiser

Å lede undervisningen fram mot læringsmålet

Et av prinsippene for ambisiøs matematikkundervisning er å ta utgangspunkt i tydelige læringsmål. Vi kan skille mellom brede matematiske mål som læreren bruker for å planlegge en undervisningsperiode, og spesifikke mål for en undervisningsøkt. Eksempel på et bredt mål: «Elevene skal kunne velge passende strategier for multiplikasjon av flersifrede tall». «Se tallet 20 på ulike måter ved hjelp av visuelle og symbolske representasjoner. Diskutere distributiv egenskap ved multiplikasjon» er eksempel på et spesifikt matematisk mål. Tydelige undervisningsmål er nyttige både for læreren som må ta mange avgjørelser i løpet av økten, og for å rette elevenes oppmerksomhet mot matematikken de skal lære seg.



Læreren Jørn Ove[1] bruker et kvikkbilde for å løfte fram den distributive egenskapen ved multiplikasjon. Elevene så bildet på flere måter. Gina så to firere til venstre i bildet. Det ble åtte. Så var det en åtter til og så en firer. Det ble 20 i alt. Læreren skriver 8 + 8 + 4 på tavla. Marie så to rader med fire prikker til venstre og tre rader med fire prikker til høyre. Det blir skrevet som 2 · 4 + 3 · 4. Læreren setter til parenteser for å vise «hva som hører sammen»: (2 · 4) + (3 · 4). Jenny så bildet omtrent på samme måte som Gina, men hun delte den siste fireren i to toere som ble lagt til hver sin åtter. Da fikk hun 10 + 10. Nå er samtalen på vei bort fra målet for timen. Jørn Ove bekrefter da Jennys måte å se bildet på, og retter så elevenes oppmerksomhet mot Maries måte å se bildet på og spør hvordan hun så 2 · 4. Marie forklarer og læreren viser på tavla. Det samme blir gjentatt med 3 · 4. Erle kommer nå på banen: Jeg tenker



[1] Eksemplet er hentet fra transkripsjonen til filmen «Kvikkbilde 2 · 4 + 3 · 4»: http://matematikksenteret.no/grunnskole/kompetanseutvikling/mam/

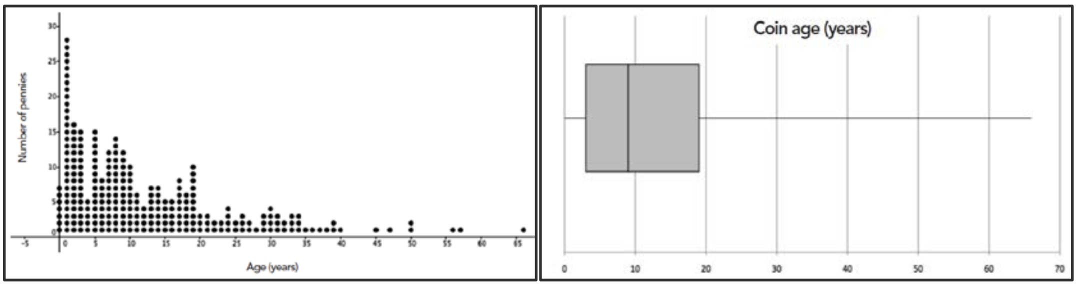
5 · 4. Lærer: Hvordan fant du ut 5 ganger 4? Erle: Jeg telte de nederste først og så var det 4. Læreren har nå fått fram det som skal til for å fremheve den distributive egenskapen ved multiplikasjon:
$(2 \cdot 4) + (3 \cdot 4) = (2 + 3) \cdot 4$, eller $(2 \cdot 4) + (3 \cdot 4) = 5 \cdot 4$.

Eksemplet viser at man kan få elevsvar som peker i ulike retninger når man stiller et åpent spørsmål. Når man har et tydelig faglig mål for timen, blir det da en utfordring å anerkjenne ulike måter å se problemet på samtidig som man løfter fram de innspillene som leder mot målet. Ved å dvele ved Maries innspill, $(2 \cdot 4) + (3 \cdot 4)$, kommer Erle på banen med sin måte å se bildet på: $5 \cdot 4$. Jørn Ove har da det som skal til for å rette elevenes oppmerksomhet mot den distributive egenskapen ved multiplikasjon.

Å få fram og gi respons til elevenes resonnering

Denne kjernepraksisen er nær knyttet til prinsippet om at lærerne lærer av sine elever. I ambisiøs matematikkundervisning bruker man målrettede spørsmål for å vurdere og fremme elevenes resonnering og forståelse av viktige matematiske ideer og sammenhenger. Et eksempel fra NCTM (2014) kan illustrere denne kjernepraksisen.

Elever på videregående skole skulle undersøke hvor mange år en pennymynt er i sirkulasjon. Læringsmålet for oppgaven var knyttet til innsamling av data, analyse av datamengden, konklusjon og vurdering av påliteligheten med hensyn på prøvetakingsmetoden. Elevene samlet inn omtrent så mange mynter som fins i en rull, 250. Datamengden ble fremstilt i to ulike diagram: Stolpediagram og boksdiagram. Boksdiagrammet viser spredningen på hver firedel av myntene sortert etter alder.



Samtalen om diagrammene startet slik:
Lærer: Hva legger dere merke til, eller hva lurer dere på om myntenes alder?
Elev 1: Det ser ikke ut som det er mange gamle mynter.
Lærer: Hva ved grafene får deg til å si det?
Elev 1: Det er høye søyler for de nyeste pennyene.
Lærer: Legger dere merke til noe annet?
Elev 2: Jeg fant spredningen i midten og så at de fleste pennyene er fra 3 til 19 år gamle.
Lærer: Forklar oss hva spredningen i midten forteller oss.
Elev 2: Det er der vi finner de fleste pennyene.
Lærer: Hva mener du med de fleste pennyene?

Elev 2: Vel, jeg mener de midterste 50 prosentene. Jeg tenkte at grafen gjør det vanskelig å vite hvor ting virkelig er. Det så ikke normalt ut, så jeg kunne ikke bruke den der midterste 68 prosent tingen vi snakket om.

(eksemplet fortsetter under neste kjernepraksis)

Vi ser at læreren stiller et åpent spørsmål til å begynne med. Når elevene avgir et svar har læreren et eller flere oppfølgingsspørsmål som utfordrer eleven på å gjøre tankene sine enda klarere for læreren, sine medelever og seg selv. Det åpne inngangsspørsmålet og oppfølgingsspørsmålene fører til at resonnementene til de to elevene kommer fram.

Å få elevene til å orientere seg mot hverandres ideer og mot læringsmålet

Når elevene får presentere sin måte å se problemene på, viser læreren at alle synspunkter er viktige, at alle kan bidra og at man kan lære av hverandre. Ved å dele tanker og ideer med hverandre blir elevene utfordret til å resonnere og sammenlikne forskjellige måter å tenke på. Det gir alle elevene mulighet til å lære viktige matematiske ideer og tenkemåter. Det forutsetter et klassemiljø der elevene er trygge på hverandre og respekterer hverandre. Klassediskusjoner ledet av læreren gir gode muligheter til å skap et slikt miljø.

Etter at elev 2 i eksemplet over hadde sagt at det ikke passet med den der midterste 68 prosent tingen, henvendte læreren seg til hele klassen:

Lærer: Jeg er ikke sikker på at jeg forstår. Kan noen andre kommentere det hun sa?

Elev 3: Hun mener at siden det er en hale, er ikke grafen lik den normalkurven vi studerte. Hvis den var det, kunne vi finne omtrent hvor de vanligste aldrene er – siden 68 prosent av dataene ville være innen et standardavvik fra medianen.

I diskusjonen som fulgte ble det konkludert med at 75 % av myntene ikke er mer enn 19 år.

Lærer: Kan vi da si at en mynt verd 50 cent sannsynligvis ikke er mer enn 19 år?

Elev 4: Ja, for disse myntene var et tilfeldig utvalg, og det betyr at vi kan generalisere.

Elev 5: Men vi så på pennyene, så vi kan ikke generalisere til kvartdollarmynter. Pennymynter brukes mer.

Lærer: Hva mener du med det?

Elev 5: Pennymynter kan bli slitt ut. Vi vet ikke noe om andre mynter ut fra vårt utvalg, for kvartdollarmynter vil være en annen populasjon.

Eksemplet viser at det er skapt en klassemiljø der elevene lytter til hverandre. De gir uttrykk for hva de tenker om medelevers innspill, både på oppfordring fra læreren slik elev 3 gjorde, og på eget initiativ slik elev 5 gjorde. Merk også at læreren i løpet av denne undervisningssekvensen har fått fram sentrale matematiske ideer uten å gjøre annet enn å stille gode spørsmål.

Å sette høye krav til elevenes deltakelse

Nøkkelen til å lære matematikk er å engasjere seg i matematisk aktivitet. Elevene bør personlig forplikte seg på ideen om at det er mulig å lære og å bruke matematikk om man anstrenger seg for å gjøre det. Det krever også at elevene regelmessig får muligheter til å erfare verdien av å forstå matematikken og verdien av å være utholdende i arbeidet mot denne forståelsen (National Research Council, 2002).

> En klasse på mellomtrinnet arbeider med et problem knyttet til brøkdeler: Joseph brukte noen av pengene han fikk til bursdagen på kjøpesenteret. Etter handelen hadde han $24 igjen. Det var $\frac{3}{5}$ av pengene han fikk. Hvor mye penger hadde han brukt? Hvor mye hadde han fått til bursdagen?
>
> Noen av elevene var raskt ute med «jeg forstår det ikke» og «jeg vet ikke hva jeg skal gjøre». Læreren ventet en stund og erfarte at flere av elevene strevde på hver sin måte. Hun bad da elevene stoppe arbeidet med problemet og skrive to ting de visste om problemet og en ting de ønsket å vite og som kunne hjelpe dem videre i problemløsingen. I løpet av en kort klassediskusjon kom det fram flere nyttige ideer: Tegn et boksdiagram eller ei tallinje som viser femdeler, eller bare velge et tall, f. eks. $50 og gå videre med prøving og feiling. Læreren bad så elevene bruke noe av det de nå hadde hørt i det videre arbeidet med problemet.

I slike situasjoner er det fristende å gi elevene hjelp slik at de får løst oppgaven raskt. Merk at læreren i eksemplet lar det gå litt tid slik at alle elevene får tid til å tenke seg om. Hjelpen elevene fikk var å skrive noe de visste og noe de lurte på og så la det bli gjenstand for diskusjon i klassen. Måten hun håndterer situasjonen på er uttrykk for en forventning om at elevene engasjerer seg og tro på at de ved å anstrenge seg selv kan finne en løsning.

Å vurdere elevenes forståelse

Skemp (1976) omtaler to typer forståelse. *Instrumentell forståelse* beskriver Skemp som anvendelse av matematiske regler uten å vite hvorfor man kan bruke reglene eller hva reglene betyr. *Relasjonell forståelse* definerer Skemp som å vite hva man skal gjøre og hvorfor man kan gjøre det. Ambisiøs matematikkundervisning sikter mot at elevene skal utvikle relasjonell forståelse. Relasjonell forståelse innebærer at elevene kan representere en matematisk idé eller prosedyre på flere måter og forklare sammenhengen mellom representasjonene (NCTM, 2014).

> Kazemi og Hintz (2014) forteller om Ms. Latimer som hadde latt elevene arbeide med strategier for å utføre beregninger uten å måtte telle. Elevene oppdaget da et mønster: Det tiende, tjuende og trettiende multiplum av et tall ender på null. De kunne multiplisere med 10 ved å «legge til en null». Selv om elevene får riktige svar ved å bruke regelen, vurderer ikke Ms. Latimer dette til å være god nok forståelse. Hun vil ikke at elevene bare skal forstå hva de skal gjøre. Hun vi at de også skal forstå hva som skjer når man «legger til» en null på et

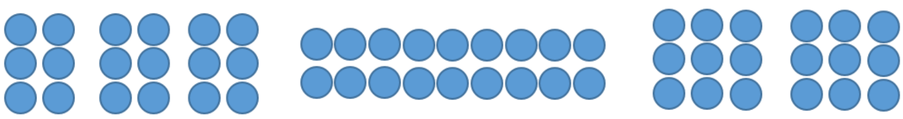
heltall. Hun planlegger derfor en time der elevene skal få innsikt i hva som skjer når en null legges til og på den måten begrunne at strategien elevene oppdaget er gyldig.

Ms. Latimer registrerer at elevene har funnet ut hvordan de enkelt kan multiplisere et tall med et multiplum av ti. Ved å lytte til hvordan elevene snakker om sin oppdagelse – at de kan «legge til en null» – vurderer læreren dette som instrumentell forståelse. Hun setter seg da som mål at elevene skal få en relasjonell forståelse knyttet til multiplikasjon med et multiplum av ti. Hun tenker da ut en representasjon som kan være til hjelp når elevene skal resonnere seg fram til hvorfor regelen fungerer.

Å bruke matematiske representasjoner

Matematikken er abstrakt av natur. Vi har kun tilgang til matematiske ideer gjennom representasjoner. Matematikk kan uttrykkes konkret, visuelt i form av tegninger og diagrammer, symbolsk, verbalt og kontekstuelt. Undervisningen bør ta sikte på å utvikle elevenes representasjonskompetanse. I eksemplet med kvikkbildet har vi sett at en visuell representasjon gir tilgang til en sentral matematisk idé: distributiv egenskap ved multiplikasjon. De to diagrammene som viser aldersfordelingen på mynter ble et godt utgangspunkt for en matematisk samtale som ledet til at elevene utforsket sentrale ideer knyttet til statistikk. I begge disse eksemplene får elevene mulighet til å utvikle en dyp forståelse av sentrale matematiske ideer. Oversetting mellom representasjoner bør gå begge veier for ytterligere å styrke forståelsen.

Etter at Jørn Ove hadde løftet fram den distributive egenskapen ved multiplikasjon ga han elevene hver sin White Board og bad dem tegne 18 prikker slik at de blir lette å telle. Elevene representerer 18 på ulike måter. Tre eksempler ble løftet fram:



Ebbe Fredrik Marie

Elevene kom med sine tanker om hvordan hver av disse tre hadde tenkt. Denne verbale representasjonen ble skrevet symbolsk og eleven som hadde laget bildet måtte svare på om det var slik det var tenkt. Maries bilde ble betraktet både som $9 \cdot 2$, $6 \cdot 3$ og $3 \cdot 3 + 3 \cdot 3$.

Timen til Jørn Ove startet med at elevene diskuterte et bilde han hadde laget. I fortsettelsen måtte elevene ta utgangspunkt i et tall, finne en struktur som passet til tallet og så lage en visuell representasjon av denne strukturen. I tillegg til at strukturene ble representert visuelt, verbalt og symbolsk ble elevene utfordret både på å gå fra det visuelle via det verbale til det symbolske og motsatt vei. Samtidig fikk elevene erfare at det er mange måter å strukturere størrelser på. Denne variasjonen og overgangen mellom representasjoner gir elevene mulighet for å utvikle matematisk forståelse.

Referanser

Kazemi, E., Cunard, A., Crowe, K. (2012*). Instructional Activities as Tools for Developing Principles and Practices of Ambitious Mathematics Instruction*. AERA 2012.

NCTM (2014). *Principles to Action. Ensuring Mathematical Success for All*. www.nctm.org

National Research Council, 2002. *Helping Children Learn Mathematics*. National Academy Press, Washington DC.

Skemp, R. R. (1987). *Psychology of Learning Mathematics*. Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers. Hillsdale, New Jersey.

Teacher Education by Design, TEDD. http://tedd.org/mathematics/