Aspekter ved tallforståelse

Forfatter:

Anita Valenta
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Publisert dato:

Mai, 2015

Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen
Realfagbygget, NTNU, NO-7491 Trondheim

Utvikling av tallforståelse framheves i mange studier som svært viktig for elevenes læring av matematikk. Men det er ikke åpenbart hva tallforståelse innebærer. Case (1998) beskriver tallforståelse slik:

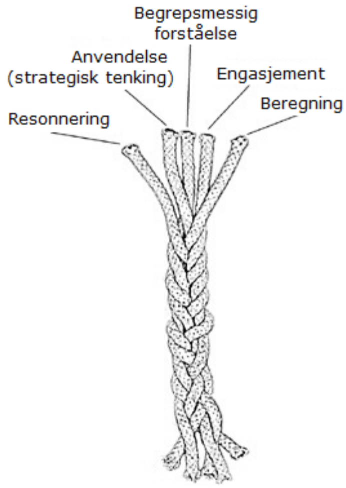
> Number sense is difficult to define but easy to recognize. Students with good number sense can move seamlessly between the real world of quantities and the mathematical world of numbers and numerical expressions. They can invent their own procedures for conducting numerical operations. They can represent the same number in multiple ways depending on the context and purpose of this representation. They can recognize benchmark numbers and number patterns: especially ones that derive from the deep structure of the number system. They have a good sense of numerical magnitude and can recognize gross numerical errors that is, errors that are off by an order of magnitude. Finally, they can think or talk in a sensible way about the general properties of a numerical problem or expression- without doing any precise computation. (p. 1)

Her fremhever Case fleksibilitet i arbeidet med tall og regneoperasjoner, bruk av ulike representasjoner, utvikling av hensiktsmessige strategier, overslagsregning, identifisering og bruk av ulike mønster, resonnering om egenskaper av tall og operasjoner. McIntosh, Reys and Reys (1992)[1] fremhever i tillegg et emosjonelt aspekt i sin definisjon av tallforståelse:

> Number sense refers to a person's general understanding of number and operations along with the ability and inclination to use this understanding in flexible ways to make mathematical judgments and to develop useful strategies for handling numbers and operations.

Deres definisjon består av tre hovedelementer: 1) generell forståelse av tall og operasjoner, 2) bruk av slik forståelse i matematisk resonnering og utvikling av hensiktsmessige strategier i arbeid med tall og regneoperasjoner og 3) lyst til å gå inn i matematiske problemstillinger og bruke forståelsen i arbeid med tall.

Kilpatrick, Swafford og Findell (2001) beskriver matematisk kompetanse som sammensatt av fem komponenter: begrepsmessig forståelse, beregning, anvendelse (strategisk tankegang), resonnering og engasjement. De fremhever at disse fem komponentene et tett sammenflettet og avhengige av hverandre. Komponentene støtter hverandre, og det er viktig at elevene får mulighet til å utvikle alle



[1] sitert i Anghileri (2006), *side 5*

fem komponentene samtidig. Forbindelsen mellom de ulike komponentene blir da forsterket og elevene utvikler en matematisk kompetanse som er varig, fleksibel, nyttig og relevant. De fem komponentene finner vi igjen i sitatene om tallforståelse fra Case og McIntosch et al., og denne definisjonen av matematisk kompetanse kan ses som et mulig utgangspunkt for nærmere drøfting av tallforståelse.

Nedenfor presenteres det en kort beskrivelse av de fem komponentene i matematisk kompetanse, og det drøftes ulike aspekter ved tallforståelse innen hver komponent. De ulike aspektene er utviklet gjennom en gjennomgang av forskning som knyttet til arbeid med tall på mellomtrinnet[2] og analyse av det faglige innholdet i oppgaver som er blitt utviklet for arbeid med tall og regning på mellomtrinnet innen ulike matematikkdidaktiske prosjekter[3].

Det er tett sammenheng mellom aspektene ved tallforståelse beskrevet nedenfor. De går delvis inn i hverandre og det er ikke lett å trekke grenser mellom det. Målet med å beskrive tallforståelse i form av noen aspekter er heller ikke å kunne isolere de ulike elementene, men heller fremheve viktige elementer av tallforståelse og gi eksempler på hva de kan gå ut på.

Begrepsmessig forståelse

innebærer å bygge opp begrepsmessige strukturer og se sammenhenger mellom ulike begreper, ideer og prosedyrer. Det handler også om å tolke og benytte ulike representasjoner, oversette og veksle mellom ulike representasjoner ut fra hva som kan være nyttig for et gitt formål. Innenfor tallforståelse kan denne komponenten ses som bestående av følgende aspekter:

Ulike måter å representere tall på og overganger mellom representasjoner består i å representere positive og negative hele tall, brøk og desimaltall symbolsk, på tallinje, med ulike illustrasjoner/tegninger, konkreter og regnefortellinger. Det å kunne tolke de ulike representasjonene og veksle mellom dem er av stor betydning for utvikling av tallforståelse.
Eksempler:

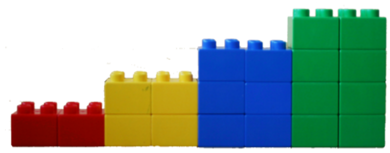
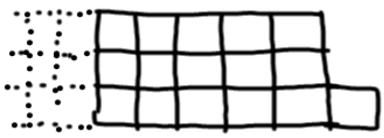
---

[2] se for eksempel: Barmby, Harries, Higgins & Suggate, 2009; Kamii & Dominick, 1997; Markovits & Sowder, 1994; Reid, 2002; Schifter, 2009; Selter, Prediger, Nuhrenborger, &Husmann, 2012; Saxe, Diakow, & Gearhart, 2012; Teppo & van den Heuvel-Panhuizen, 2013; Wagner & Davis, 2010.

[3] se for eksempel: Carpenter, Franke, & Levi, 2003; Fosnot & Dolk, 2001, 2002; Lamon, 2006; Parrish, 2010; Russell, Schifter, & Bastable, 2011.

Representere tallet seks som • en mengde på 6 objekter (som kan være delt opp på ulike måter) • kvantifisering av en fysisk størrelse (som f.eks. en lengde på 6) • et tall på tallinja som står i relasjon til andre tall (er f.eks. større enn 5 og mindre enn 6,2) • symbolet "6" • summen av 1 og 5, produktet av 2 og 3,osv	Representere tallet tre fjerdedeler som • som et tall på tallinja • som tallet vi får når vi regner ut 3 : 4 • symbolet $\frac{3}{4}$ Gjennom ulike situasjoner som f.eks. • 3 hele skal deles på 4 personer • en person får tre firedeler av en mengde

Ulike egenskaper ved tall består i å kjenne til og kunne beskrive egenskaper ved tall, identifisere tall som har egenskapene, beskrive strukturer og representere dem på ulike måter *Eksempler:*

Partall er • tall som er delelig med 2 • er på formen $2 \cdot \boldsymbol{n}$ der n er et naturlig tall • et antall klosser som gir to like lange tårn	
14 er et produkt av tallene 2 og 7. Det betyr at vi kan representere 14 som • $2 \cdot 7$ • som antall ruter i et rutenett med 2 rader og 7 ruter i hver rad • som antall drops i to poser med 7 drops i hver pose.	
Et tall som har rest 1 når det divideres med 3 kan representeres som • $3 \cdot \boldsymbol{n} + 1$ der n er et helt tall • et antall drops som kan fordeles på 3 poser slik at det er like mye i hver og så er det ett drops til overs • som antall klosser i tre tårn der det ene har en kloss mer enn de to andre	

Relasjoner mellom tall består i å kjenne til og kunne beskrive ulike relasjoner mellom tall, gjenkjenne relasjonene og representere dem på ulike måter. *Eksempler:*

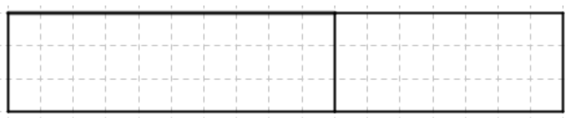
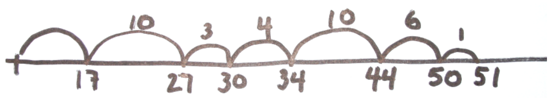
Større enn og mindre enn, som at • et tall er 5 større enn et annet, differansen mellom dem er 5 • et tall er 3 ganger større enn et annet tall • sammenligning av et gitt tall med noen "referansetall" som 10, 100, 25, 1, 1/2, osv., avhengig av tallet og situasjonen	Tall som har samme struktur • 29 og 139 er begge på formen $\mathbf{10} \cdot \mathbf{n} - 1$ • tall med 5 som faktor kan skrives på formen $\mathbf{5} \cdot \mathbf{n}$ og representeres også som f.eks. antall drops når det er 5 poser med samme antall drops i hver pose

Relasjoner som bygger på posisjonssystemet består i å kjenne til og kunne beskrive ulike relasjoner mellom tall som kommer av posisjonssystemet, fleksibilitet i overgang mellom symboler (tallene skrevet i 10-tallssystemet) og tallverdien. *Eksempler:*

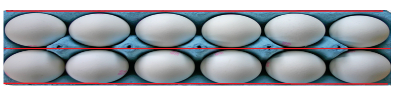
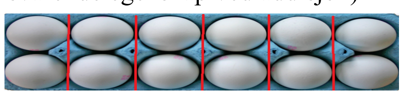
Se på 123 som • 1 hundrer, 2 tiere og 3 enere • 12 tiere og 3 enere • 11 tiere og 13 enere • …	Se på 0,7 som • 10 ganger mindre enn 7 • 10 ganger større enn 0,07 • 7 tideler • …	Se på 1,2 som • 100-delen av 120 • 10 ganger større enn 0,12 • …

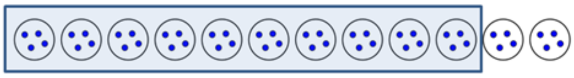
57 drops							
	10-pakke	0	1	2	3	4	5
	enkel	57	47	37	27	17	7

Ulike måter å representere regneoperasjoner på og overganger mellom representasjonene innebærer å kunne representere regneoperasjoner symbolsk, med konkreter og tegninger, på ei tallinje og gjennom regnefortellinger. Det innebærer også å kunne tolke representasjonene og skifte mellom dem. *Eksempler:*

Kjenne igjen regneoperasjoner i ulike typer regnefortelinger fra hverdagen og beskrive konteksten symbolsk.	23 elever skal deles i firer-grupper 23 : 4 = 5, rest 3 Fem grupper med fire og ei gruppe med 3
Kunne presentere et gitt regnestykke i form av en regnefortelling eller en illustrasjon, for eksempel representere • et subtraksjonsstykke som en differanse på ei tallinje • et multiplikasjonsstykke som antall ruter i et rutenett eller som "hopp" på tallinjen (3 · 17)	 
Kjenne til ulike typer situasjoner som svarer til en gitt regneoperasjon, kunne forklare likheter og fo mellom dem.	• "ta bort" og "differanse" i subtraksjon • multiplikasjon som "like grupper", rutenett, areal av en rektangel, forstørring

Grunnleggende egenskaper ved regneoperasjoner handler om kjennskap til den kommutative, asssosiative og distributive egenskapen ved regneoperasjoner, kunnskap om motsatte regneoperasjoner og identitetselementer. Det innebærer å kunne uttrykke egenskapene på ulike måter og se sammenhenger mellom dem. *Eksempler:*

Kommutativ egenskap ved multiplikasjon: $a \cdot b = b \cdot a$ (Tilsvarende egenskap ved addisjon) $2 \cdot 6$  $6 \cdot 2$ 
Assosiativ egenskap ved addisjon $a + (b + c) = (a + b) + c$ (Tilsvarende egenskap ved multiplikasjon) Når man skal legge sammen tre tall, som f.eks. 24, 11 og 9, så kan man legge sammen 11 og 9 først, så 24, eller man kan legge sammen 24 og 11 først, så 9. Det blir likt. $24 + (11 + 9) = (24 + 11) + 9.$

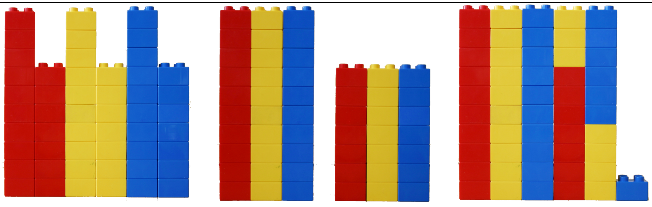
Det kan man se ved å tenke seg for eksempel tre sjokolader som koster 24, 11, og 9 kroner og vi skal finne prisen tilsammen. Da spiller det ingen rolle hvilke to priser vi starter med å addere før vi legger den siste, prisen blir den samme til slutt.	
Den distributive egenskapen: $a \cdot (b+c)= a \cdot b+a \cdot c$ $12 \cdot 4 = (10 + 2) \cdot 4$	
Addisjon og subtraksjon er motsatte operasjoner, at $(a +5)-5=a$. Tilsvarende med multiplikasjon og divisjon: $(a : 7) \cdot 7=a$.	
0 er det tallet som er slik at $a+0=a$ for alle tall a, og tallet -a er slik at $a+(-a)=0$; Tilsvarende, 1 er det tallet som er slik at $a \cdot 1=a$, og tallet 1/a er slik at $a \cdot 1/a=1$.	

Beregning

handler om kunnskap om ulike matematiske prosedyrer/strategier, når og hvordan de kan brukes og å kunne utføre dem nøyaktig, fleksibelt og hensiktsmessig. Det innebærer innsikt i ulike egenskaper ved og relasjoner mellom tall og operasjoner og evnen til å utnytte dem i arbeid med aritmetiske problem. Følgende aspekter kan sees som sentrale når det gjelder beregning.

Utvikling av varierte strategier handler om å kunne utvikle strategier i arbeid med regneoperasjoner. Ofte fremheves betydning av at elever utvikler ulike strategier med utgangspunkt i regnefortellinger og illustrasjoner. Når strategier utvikles på den måten, er det enklere for elevene selv å vurdere hva som kan gjøres og hva som ikke gir mening. Overganger mellom de ulike representasjonene er av stor betydning i denne utviklingen. Hvis en strategi utvikles for eksempel gjennom en regnefortelling, er det viktig at den også beskrives symbolsk. Det kan virke til at en bevissthet om fremgangsmåten generaliseres utover den gitte konteksten. Arbeid med tallmønster kan også være utgangspunkt for utvikling av variere strategier. Eksempler:

For å regne ut antall drops i 4 poser med 49 drops, kan man utnytte at 49 drops er 1 færre enn 50 og at vi da kan regne ut $4 \cdot 49$ som $4 \cdot 50 – 4 \cdot 1$	$4 \cdot 5$ $4 \cdot 50$ $4 \cdot 49 = 4 \cdot 50-4$	50 50 50 50 −1 −1 −1 −1

Regne ut $3 \cdot 17$ ved å tenke på 17 som 17 klosser som deles opp i 10 og 7. Da kan vi se $3 \cdot 17$ som $3 \cdot (10 + 7) = 3 \cdot 10 + 3 \cdot 7$	
Man kan tenke på 501-398 som differansen mellom tallene og regne «bakover». $501 – 398 = 1 + 100 + 2$	
$12 : 4 = 3$ $12 : 2 = 6$ $12 : 1 = 12$ $12 : ½ = ?$	Hva er likt i de tre første regnestykkene? Hva er forskjellig i de tre første regnestykkene? Hva kan svaret på det siste regnetykket være hvis vi følger mønsteret?

Bruk av varierte strategier består i å beherske ulike skriftlige og muntlige strategier i arbeid med tall og regneoperasjoner, kunne bruke estimering og digitale hjelpemidler. I denne artikkelen skilles det ikke spesielt mellom muntlige og skriftlige strategier, siden det gjerne er den samme tenkingen som ligger i bunn og det avhenger av tallene om det kan være nødvendig å notere noe underveis. I de ulike regnestrategiene er det forskjellige egenskaper ved tall, posisjonssystemet og operasjoner som utnyttes. Eksempler:

For å estimere $75 \cdot 89$ kan vi runde av 89 til 100 og se at svaret må være under 7500. Man kan resonnere videre at svaret er ca. 90% av 7500, og må ligge i området 6500-7000. Noen forslag for mulige strategier/fremgangsmåter for å beregne $75 \cdot 89$ eksakt kan være: o $(10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 5) \cdot 89$ o $7 \cdot (10 \cdot 89) + (10 \cdot 89) : 2$ o $(100 – 25) \cdot 89$, der $25 \cdot 89$ er en firedel av $100 \cdot 89$ o $¾ \cdot (100 \cdot 89)$ o $75 \cdot (100 – 10 – 1)$ 7500 - 750 - 75 I de forskjellige strategiene utnyttes egenskapene av multiplikasjon og de involverte tallene, posisjonssystemet og ulike referansetall.
Noen mulige strategier for å regne ut $127 + 206$ der utnytter man posisjonssystemet samt assosiativ og kommutativ egenskap for addisjon kan være: o $120 + 200 + 7 + 6 = 320 +13$ o $127 + 200 + 6 = 327 +6$ o $206 +120+7 = 326 + 7$ o $130 + 206-3 = 336 - 3$ o $130 + 210 – 3 - 4 = 340 - 7$

Valg av en hensiktsmessig strategi handler om å kunne vurdere hvilken strategi som kan være hensiktsmessig for det gitte regnestykket og for den gitte situasjonen. Selv om det kan være mange fremgangsmåter for å finne svar i et gitt regnestykke, er gjerne noen strategier mer hensiktsmessige enn andre for akkurat de gitte tallene. I mange situasjoner, spesielt de som er knyttet til dagliglivet, er det heller ikke så viktig med et helt nøyaktig svar, det holder med et estimat. Videre, i situasjoner der nøyaktig svar er viktig, der utregninger ikke står i fokus og der tallene er "lite pene", kan bruk av kalkulator være mest hensiktsmessig.

Eksempler:

For å regne ut 0,25 · 36 kan det være hensiktsmessig å utnytte det som er spesielt med tallet 0, 25 – det at det er det samme som en firedel. 0,25 · 36 er slik det samme som en fjerdedel av 36 og det 9.
For å regne ut 17 · 98 kan det være lurt å utnytte 98 er nær 100. Strategien blir da 17 · 100 – 17 · 2 = 1700 – 34.
For å regne ut 235 – 197 kan en hensiktsmessig strategi være å øke begge tallene med 3. Da får man et enklere regnestykke 238 – 200, og differansen er fortsatt den samme. En annen strategi som kanskje er like hensiktsmessig er å ta 200 som referansetall og se på begge de involverte tallene ut fra det - differansen mellom 235 og 200 er 35, mellom 200 og 197 er det 3; differansen mellom 235 og 197 er da 35 + 3. Her er det lite hensiktsmessig å dele opp begge tallene ut fra posisjonssystemet (som i standardalgoritmen).
For å finne ut hvor mange pakker drops man kan kjøpe for 100 kroner når hver pakke koster 11,90 kr, kan det være hensiktsmessig å runde av prisen og estimere.
I situasjoner der man trenger et nøyaktig svar på regnestykker som 68 · 842 eller 134,24 :51,2 er bruk av digitale hjelpemidler et naturlig valg.

Effektivitet og nøyaktighet er viktige elementer i arbeid med regneoperasjoner. Arbeid med matematiske problem krever ofte en del utregninger, og det kan være greit at man etter hvert kan utføre dem uten å være nødt til å tegne og telle. Effektivitet og nøyaktighet i beregning bygger på automatisering av enkle tallfakta, et spekter av referansetall og et bredt utvalg av strategier man kan velge mellom. Automatisering av enkle tallfakta som 9+5 = 14 og 12·10 = 120 viktig for videre arbeid med tall, men det er viktig at læringen ikke handler om ren memorering. Erfaringer med tallfakta i ulike situasjoner, gjennom ulike representasjoner og med fokus på strukturer og relasjoner vil etter hvert føre til automatisering. Erfaringer med ulike strategier og diskusjoner om hvilke som kan være hensiktsmessige i en gitt situasjon, kan legge til rette for en gradvis effektivisering av valg av strategi for å løse et gitt problem og utnyttelsen av faktakunnskap. Eksempler:

En effektiv strategi for å regne ut 128 : 8 kan være å se 128 som 12 tiere og 8 enere, og det skal deles på 8. Det gir 1 hel tier til hver. Da er det 48 enere igjen. 48 : 8 er 6 og svaret blir 10 + 6 = 16. I strategien gis divisjonen "deles på et antall personer" mening. Posisjonssystemet og veksling mellom tiere og enere utnyttes for å ta i bruk faktakunnskap og gjøre utregningen enklest mulig.

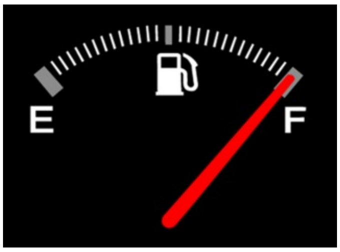
Når man skal regne ut $75 \cdot 89$, kan det være en effektiv strategi å ta utgangspunkt i at $75 \cdot 100 = 7500$ og så subtrahere en tidel og en hundredel. Da utnyttes strukturen av tallet 89 som 100-10-1. Det gjøres for å kunne utnytte at multiplikasjon med 100, 10 og 1 er (etter hvert) faktakunnskap. Utregningen blir nå enkel nok til at mange kan regne det ut i hode.

$$7500 - 750 - 75$$

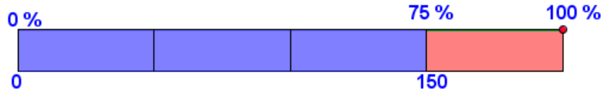
Anvendelse eller strategisk tankegang

innebærer å kunne gjenkjenne og formulere matematiske problemer, representere dem på en hensiktsmessig måte, utvikle en løsningsstrategi og vurdere hvor rimelig løsningene er. Med matematiske problemer menes det her problem i hverdags-, arbeids- og samfunnsliv der matematikk kan anvendes, men også abstrakte matematiske problem og spørsmål. Kjennetegnet på et "problem" er at man ikke har opparbeidet en rutine for å løse det. Man trenger å utvikle en strategi for å løse problemet. Dette innebærer at det som er et problem for noen ikke trenger å være det for noen andre. Eksemplene i det følgende må betraktes ut fra denne forståelsen av problem.

Gjenkjenning og formulering av matematiske problem innebærer å gjenkjenne situasjoner der ulike begreper og ideer knyttet til tall og talloperasjoner kan brukes til å beskrive situasjonen og formulere et matematisk problem eller hypotese. Innhenting av nødvendig informasjon, kvantifisering av ulike størrelser og valg av variabler man skal se på også viktige elementer her. *Eksempler:*

Finne ut om vafler som selges i kantina har for høy pris.	
Finne ut hvor langt en bil kan kjøre med full tank.	
Finne ut om alle hele tall som har 5 som faktor har 0 eller 5 som siste siffer, og hvorfor de gjør det i så fall.	
Hva vil klassefesten koste per person?	

Utvikling av en løsningsstrategi for et matematisk problem består i å kunne representere problemet på ulike måter og knytte det til kunnskap om tall, regneoperasjoner og kjente sammenhenger og fremgangsmåter. Videre består det i å kunne utforske problemet systematisk og søke etter mønster eller system. For å få bedre innsikt i ulike sider ved problemet kan det være nyttig å skifte mellom ulike representasjoner. *Eksempler:*

Bilen bruker 0,48 l/mil. Hvor mye bensin bruker den på 20 km? Vi kan lage en tabell som gir oversikt.	0,48 l/mil ca 1 L 0,48 | 0,96 for 20km 10 | 20
Ei bukse kostet 150 kr på salg. Hva kostet buksa opprinnelig når rabatten var 25 %?	

Vurdering av svar dreier seg om å overveie størrelsene og se for seg situasjonen, tenke gjennom om svaret kan være rimelig. Det innebærer også å tenke gjennom om det er noe som kan ha betydning for beregningene og som det ikke er tatt hensyn til under arbeidet.

Eksempler:

For å finne gjennomsnitts temperatur om morgenen når målingene ei uke viser 5,8 – 6,7 – 12,4 – 13,9 – 9,9 – 11,7 – 14,2 kan man bruke lommeregner. Hva hvis den viser 67,5?	For å finne ut om alle hele tall som har 5 som faktor har 0 eller 5 som siste siffer, kan man sjekke alle multiplum av 5 opp til 100. Betyr det at det gjelder for *alle* multiplum av 5?

Resonnering

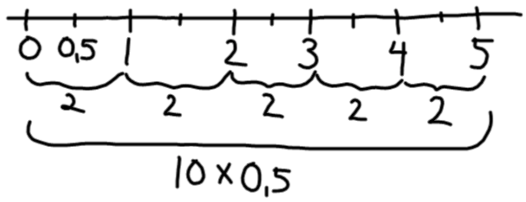
handler om å kunne forklare hvordan man tenker, se etter mønster og sammenhenger. Videre handler det om å utforme hypoteser, begrunne sammenhenger mellom ulike begreper, egenskaper og framgangsmåter og følge med i andres resonnement. Det innebærer også å kunne argumentere for gyldigheten av en hypotese ved å utforme et resonnement med utgangspunkt i noe som er kjent og å stake ut veien mot det som er ukjent og skal undersøkes. Innen tallforståelse handler resonnering om ulike sammenhenger og egenskaper ved tall og regneoperasjoner, og man kan skille mellom det å resonnere om og begrunne noe for et enkelt eksempel eller for en klasse eksempler (generalisering).

Gjenkjenning og beskrivelse av struktur, mønster og sammenhenger i arbeidet med tall består i å søke etter og beskrive mønster og sammenhenger. Dette er det første steget i resonnering, utforming av hypoteser og utforskning. *Eksempler:*

I et tidligere eksempel så vi hvordan en sekvens av relaterte regnestykker kan brukes som utgangspunkt i utvikling av en strategi. I sekvensen fremheves det en sammenheng mellom divisor (halveres) og kvotient (dobles), og denne sammenhengen kan lede til flere hypoteser. $12 : 4 = 3$ *Hypoteser:*

$12:2=6$	*- svaret på 12 : ½ er 24.*
$12:1=12$	*- når divisor i et divisjonsstykke halveres, så dobles svaret*
$12:\frac{1}{2}=\ ?$	*- når vi deler et tall med en brøk som har 1 i telleren,* *så ganger vi bare tallet med nevneren*
En elev sier: "Jeg tror at 99 · 11 = 999. Det er fordi at når man ganger et tall med 11, så gjentas tallet. Som for eksempel 3 · 11 = 33, 7 · 11 = 77 og 8 · 11 = 88."	

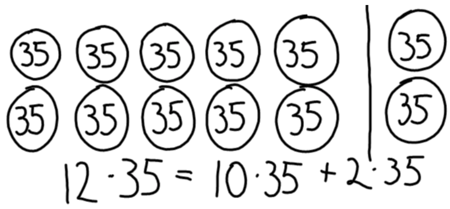
Begrunnelser av strategi/sammenheng på enkelteksempler består både i å kunne begrunne og kommunisere egne resonnement om enkelteksempler og å kunne følge med i andres begrunnelser. *Eksempler:*

12 · 35 = 10 · 35 + 2 · 35 fordi jeg kan tenke på 12 · 35 som 12 hauger med 35 kroner i hver. Jeg regner først ut hvor mye penger det er i 10 hauger, og så de to siste haugene. Da legger jeg sammen de to delene til slutt. Hvis den distributive egenskapen er kjent fra før, kan argumentasjonen være: Jeg deler 12 opp i to deler, multipliserer begge med 35 og legger sammen til slutt.	
Tallet 5 er 10 ganger større enn tallet 0,5. Det er fordi 0,5 betyr 5 tideler, og hvis man skal finne tallet som er 10 ganger større så tar man altså "5 tideler" 10 ganger. To og to "5 tideler" blir 1, så vi får 5 til slutt.	
31 · 10 er 310 fordi man kan tenke på det som 31 tiere. Ti tiere er 100, 30 tiere er 300, så 31 tiere er 310.	

Utforskning av generelle hypoteser ved bruk av et generisk eksempel eller et moteksempel. Når vi bruker et generisk eksempel ser vi på et enkelteksempel "på en generell måte". Ved å resonnere undersøker vi om noe ville blitt annerledes med andre eksempler av samme type. Ofte kan det være formålstjenlig å bruke en regnefortelling eller modell for å se hva som skjer og hvorfor det blir slik. Resonnering om grunnleggende egenskaper ved regneoperasjoner er for eksempel vanskelig uten å ta i bruk en annen representasjon enn symboler. Bruk av ulike representasjoner kan generelt være viktige for elevers resonnering og utforskning av generelle sammenhenger. Moteksempler er også viktige i utforskning av generelle hypoteser.
Eksempler:

Hypotese

Man kan alltid dele opp et av tallene i en multiplikasjon, og så multiplisere hvert av leddene med det andre tallet, som i $12 \cdot 35 = 10 \cdot 35 + 2 \cdot 35$. Vi kan også dele opp 12 i 7 + 5 eller 3 + 9, eller andre mulige kombinasjoner.

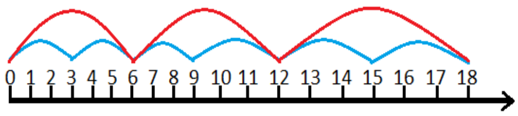


Hvis vi tenker på 12 · 35 som penger som er 12 hauger, 35 kroner i hver, og vi lurer på hvor mye penger det er, så kan vi dele haugene i 10 hauger og 2 hauger, finne ut hvor mye penger det er i hver av delene, så legge sammen. Det kan vi alltid gjøre, uansett antall hauger og hvor mye penger det er i hver haug.

Her resonneres det om den distributive egenskapen ved multiplikasjon av positive hele tall.

Hypotese:

Alle tall som er delelig med 6 er også delelig med 3".



Vi kan se på 48 som $8 \cdot 6$. Det blir 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6.

Vi kan dele hver 6-er i to 3-ere. Da blir 48 = 3 + 3 + ... + 3 16 ganger.

Da er $48 = 16 \cdot 3$ og altså delelig med 3.

Det kan vi gjøre uansett hvilket tall som er delelig med 6. Vi starter med å dele opp hver 6-er i to 3-ere, og ser da at tallet er delelig med 3 også.

Oppgave: $99 \cdot 11$. Hypotese: Det blir 999. Når vi ganger et tall med 11, så gjentas tallet som $3 \cdot 11 = 33$, $7 \cdot 11 = 77$ og $8 \cdot 11 = 88$.

Hypotesen stemmer for tallen 1-9, men ikke generelt. $99 \cdot 11$ er et moteksempel.

Utforske gyldigheten av generelle hypoteser ved utforming av generelle resonnement.

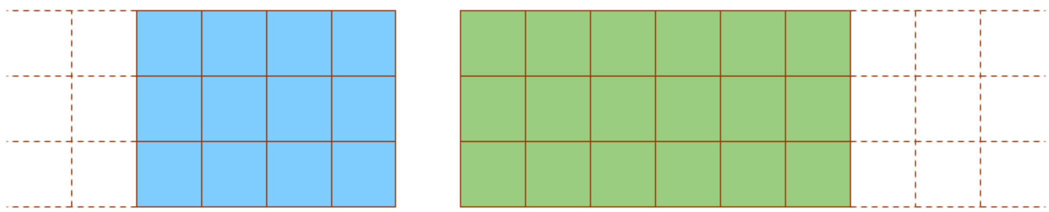
Generelle hypoteser kan også undersøkes generelt, ikke bare ved generiske eksempler eller moteksempler som vist over. Generelle resonnement bygger på kjente resultater og gjerne ved å ta i bruk algebraisk notasjon, men det er ikke alltid nødvendig.

Eksempler

Hypotese

Hvis vi legger sammen to tall som begge er delelige med 3, så vil også summen være delelig med 3.

Et tall som er delelig med 3 kan tenkes som et antall kvadrat som ligger inntil hverandre i 3 like lange rader. Et annet tall som er delelig med 3 kan ordnes på samme måte. Vi ser at vi kan legge sammen en rad fra det første tallet med en rad fra det andre tallet. Da får vi igjen 3 like lange rader, og antall kvadrater er summen av de to tallene vi startet med. Siden summen også er ordnet i 3 like lange tårn, er også summen delelig med 3.



Samme hypotese som over kan vi begrunne ved bruk av algebraiske symboler og kjennskap til den distributive loven.
Et tall som er delelig med 3 er på formen 3 · et positivt heltall. Hvis vi sier at det første tallet er $3 \cdot a$ og det andre tallet er $3 \cdot b$, er summen $3 \cdot a + 3 \cdot b$. Siden multiplikasjon er distributiv, er summen lik $3 \cdot (a + b)$ og delelig med 3.

Engasjement

handler om å se matematikk som fornuftig, nyttig og verdifull. Videre innebærer dette aspektet å ha tro på at det er mulig bli kompetent i matematikk og at man lærer ved å streve og ikke gi opp.

Ha tro på at innsats fører til læring handler om å se seg selv som en som kan lære matematikk. Utvikling av kompetansen til å gjenkjenne og bruke ulike relasjoner, utvikle varierte strategier i arbeid med tall og aritmetiske operasjoner, utforme og begrunne hypoteser osv. tar tid og krever innsats og konsentrasjon, men det er mulig for alle.

Oppleve det som meningsfullt å søke etter relasjoner i arbeidet med tall handler om at elevene bør få erfare at det å se etter sammenhenger og strukturer gir mening og gjør faget kreativt og skapende. Mønstrer og sammenhenger er selve kjernen i matematikk. Søk etter mønster og sammenheng kan gjøre tilsynelatende kjedelige regnestykker til utgangspunkt for spennende og kreative måte å tenke på og å utfordre seg selv på.

Se det som nyttig å bruke ulike representasjoner i arbeidet med tall. Ulike representasjoner gir innblikk til ulike egenskaper og aspekter ved et tall. Noen ganger kan det passe bedre å representere tallet på en spesiell måte enn en annen måte. Noen ganger representerer vi tallet seks som symbolet "6", andre ganger som $4 + 2$ eller $3 \cdot 2$. I noen tilfeller kan det være lurt å tenke på det som et punkt på tallinja, i andre tilfeller som en mengde på 6 eller som en lengde på 6. En bevissthet om muligheter til representere tall, operasjoner, egenskaper osv. på ulike måter og verdien av å bruke det er viktig for elevers læring.

Se verdien av å utvikle flere fremgangsmåter for samme type problem. Ulike fremgangsmåter og sammenligning av dem gir mulighet til å se et problem fra ulike sider. Det gir også mulighet for å tenke kreativt, velge hensiktsmessige fremgangsmåter og å etablere relasjoner mellom ulike ideer. Elevene bør se på disse elementene som viktige i arbeid med ulike problem knyttet til tall og regneoperasjoner. Som oftest er dette være viktige for matematikklæring enn selve svaret i et gitt problem.

Utvikling av tallforståelse

De fem komponentene – begrepsmessig forståelse, beregning, anvendelse (strategisk tankegang), resonnering og engasjement – og aspektene ved hver av dem er tett sammenflettet og avhengige av hverandre. De støtter hverandre, og de utvikles samtidig. Det betyr at det ikke er slik at ”bare elevene blir flinke til å regne, så kommer forståelsen etter hvert”, noe man ofte kan høre. ”Flink til å regne” innebærer mye mer enn å memorere noen tallfakta og kunne følge et gitt oppsett. Utvikling av strategier henger tett sammen med forståelse av relasjoner mellom tall og operasjoner, ulike representasjoner, begrunnelser for strategier og verdsetting av ulike måter å tenke på. Tilsvarende med alle andre aspekter av tallforståelse; de utvikles sammen, forsterkes av hverandre og kan ikke tenkes i en rekkefølge. En oppgave legger gjerne opp til noen aspekter i større grad enn noen andre, og det kan være viktig at læreren også velger hvilke aspekter hun ønsker å fremheve under arbeidet med en gitt oppgave. Men det er viktig at alle de ulike aspektene arbeides med over tid. Elevene utvikler da en tallforståelse som er varig, fleksibel, nyttig og relevant både for videre matematikklæring, i deres hverdagsliv og seinere i deres profesjonelle karriere.

Bevissthet og metakognisjon er sentrale aspekter ved matematikklæring generelt, og også i utvikling av tallforståelse. Elever som får arbeide med tallforståelse med utgangspunkt i denne forståelsen av trådmodellen vil implisitt utvikle både bevissthet og metakognisjon. Men det er også viktig å diskutere utvikling av kompetansene eksplisitt med elevene. Spesielt vil aspekter ved *engasjement* kunne forsterkes gjennom eksplisitt diskusjon med elevene om hva matematikk handler om og hvordan man lærer matematikk. Verdien av representasjoner og nyttighet av å utvikle flere fremgangsmåter må inngå i denne prosessen. Diskusjoner der man "ser ovenfra" på arbeid med tall og regneoperasjoner og diskuterer hva, hvordan og hvorfor kan bidra til økt motivasjon og bedre prestasjonen i faget.

Referanser

Anghileri, J. (2006) Teaching Number Sense, 2nd edn. London: Continuum.

Barmby, P., Harries, T., Higgins, S., & Suggate, J. (2009). The Array Representation and Primary Children´s Understanding and Reasoning in Multiplication. *Educational Studies in Mathematics, 70*(3), 217-241.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically : Integrating arithmetic and algebra in elementary school.* Portsmouth: N.H., Heinemann

Case, R. (1998, April). A psychological model of number sense and its development. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, San Diego.

Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2001). Young mathematicians at work: Constructing multiplication and division. Portsmouth, N.H.: Heinemann.

Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2002). *Young mathematicians at work: constructing fractions, decimals, and percents.* Portsmouth, N.H.: Heinemann.

Kamii, C., & Dominick, A. (1997). To Teach or Not to Teach Algorithms. *Journal of Mathematical Behavoir, 16*(1), 51-61.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (red.)(2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* J. Washington, National Research Council. DC: National Academy Press.

Lamon, S. J. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding*. New York: Routledge 3.utg.

Markovits, Z., & Sowder, J. (1994). developing Number Sense: An Intervention Study in Grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(1), 4-29.

McIntosh, A., Reys, B. og Reys, R. (1992). A proposed framework for examining number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12(3), 25-31.

Parrish, S. (2010). *Number talks. Helping children build mental math and computation strategies*. Scholastic Inc.

Reid, D. A. (2002). Conjectures and Refutations in Grade 5 Mathematics. *Journal for Research in Mathmetics Education, 33*(1), 5-29.

Russell, S. J., Schifter, D., & Bastable, V. (2011). *Connecting Arithmetic to Algebra.* Portsmouth, N.H.: Heinemann.

Saxe, B. G., Diakow, R., & Gearhart, M. (2013). Towards curricular coherence in integers and fractions: a study of the efficacy of a lesson sequence that uses the number line as the principal representational context. *ZDM Mathematics Education, 45*, 343-364.

Schifter, D. (2009). Representation-based proof in the elementary grades. In D. Stylianou, M. Blanton, & E. Knuth (red.), *Teaching and Learning Proofs across the grades* (s. 71-86). New York: Routledge.

Setler, C., Prediger, S., Nuhrenborger, M., & Husmann, S. (2012). Taking away and determining the difference - a longitudinal perspective on two models of subtraction and the inverse relation to addition. *Educational studies in Mathematics, 79*, 389-408.

Teppo, A., & van den Heuvel-Panhuizen, M. (2014). Visual representations as objects of analysis: the number line as an example. *ZDM Mathematics Education, 46*, 45-58.

Wagner, D., & Davis, B. (2010). Feeling number: grounding number sense in a sense of quantity. *Educational Studies in Mathematics, 74*, 39-51.

Aspekter ved tallforståelse på mellomtrinnet – Oversikt

begrepsmessig forståelse

- bygge opp begrepsmessige strukturer og se sammenhenger mellom ulike begreper, ideer og prosedyrer

- ulike måter å representere tall på og overganger mellom representasjoner
- ulike egenskaper ved tall
- relasjoner mellom tall
- relasjoner som bygger på posisjonssystemet
- ulike måter å representere regneoperasjoner på og overganger mellom representasjoner
- grunnleggende egenskaper ved regneoperasjoner

beregning

-å kunne utføre ulike matematiske prosedyrer nøyaktig, fleksibelt og hensiktsmessig

- utviking av varierte strategier
- bruk av varierte strategier
- valg av en hensiktsmessig strategi
- effektivitet og nøyaktighet

anvendelse (strategisk tankegang)

-ta i bruk begreper, ideer og prosedyrer knyttet til tall og regneoperasjoner i nye situasjoner og problem

- gjenkjenning og formulering av matematiske problem
- utvikling av en løsningsstrategi for et matematisk problem
- vurdering av svar

resonnering

-forklare hvordan man tenker, begrunne sammenhenger og fremgangsmåter, følge med i et logisk resonnement og vurdere gyldigheten

- gjenkjenning og beskrivelse av struktur, mønster og sammenhenger i arbeidet med tall
- begrunnelse av strategi/sammenheng på enkelteksempler
- utforskning av generelle hypoteser ved bruk av et generisk eksempel eller et moteksempel
- utforske gyldigheten av generelle hypoteser ved utforming av generelle resonnement

engasjement

- se matematikk som fornuftig, nyttig og verdifull, ha tro på at det er mulig bli kompetent i matematikk

- ha tro på at innsats fører til læring
- oppleve det som meningsfullt å søke etter relasjoner i arbeidet med tall
- se det som nyttig å bruke ulike representasjoner i arbeidet med tall
- se verdien av å utvikle flere fremgangsmåter for samme type problem