NTNU
Det skapende universitet

Kommunikasjon mellom lærer og elever i et undersøkende og et tradisjonelt matematikklasserom

Anne Lise Øvstebø Vesterdal

Lektorutdanning med master i realfag
Oppgaven levert: Mai 2011
Hovedveileder: Marius Irgens, MATH
Biveileder(e): Kjersti Wæge, PLU

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Forord

Masterstudien min ble gjennomført i løpet av våren 2011, som avslutning på lektorutdanning i realfag ved Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet i Trondheim. Gjennom mine fem år som lektorstudent, og spesielt nå i arbeidet med masteroppgaven, har flere mennesker gitt meg hjelp og støtte. De vil jeg takke spesielt nå.

Først og fremst vil jeg takke mine to veiledere Marius Irgens og Kjersti Wæge. Jeg vil takke Marius for gode samtaler og for fine diskusjoner rundt tolkninger av datamaterialet. Kjersti, jeg takker deg for solid oppfølging og støtte gjennom hele arbeidsprosessen. Gjennom veiledningsøktene våre har du roet nervene mine når jeg har vært stresset, inspirert meg til å fortsette arbeidet og alltid gitt konstruktive tilbakemeldinger og råd for å komme videre.

Videre takker jeg Hild Mari Kvikne, Lene Hayden Taraldsen og Gro Ingeborg Hansen for hjelp i skriveprosessen. Gjennom skrivegruppa vår har dere kommet med konstruktive forslag til forbedringer av skrevet tekst og bidratt med gode råd og tips. Takk også til Marianne Øvstebø for hjelp med den engelske versjonen av sammendraget.

Jeg vil også rette en spesiell takk til de to lærerne og klassene som jeg gjennomførte datainnsamlingen i. Takk til lærerne for at dere sporty stilte opp og lot dere filme; studien kunne ikke vært gjennomført uten dere.

Til sist vil jeg takke mine nærmeste som har støttet meg gjennom hele utdanningsforløpet og spesielt i arbeidet med masterstudien. En spesiell takk til min mor Tordis Øvstebø som ikke bare har bidratt med korrekturlesing, men som også har vist stor interesse for temaet i oppgaven. Å kunne diskutere oppgaven med deg har vært en viktig motivasjonsfaktor.

Trondheim, 1. juni 2011

Anne Lise Øvstebø Vesterdal

Sammendrag

I masteroppgaven fokuseres det på kommunikasjon mellom lærer og elever i matematikklasserommet. Målet med studien er å få dypere innsikt i hva som kjennetegner kommunikasjonen mellom læreren og elevene i to klasser som arbeider med matematikk på to ulike måter. Studiens problemstilling er: *Hva kjennetegner kommunikasjonen mellom læreren og elevene i en klasse som arbeider innenfor en undersøkende matematikkundervisning, og i en klasse som arbeider innenfor en tradisjonell matematikkundervisning?* I studien benyttes et analyseverktøy bestående av teori om ulike kommunikasjonsmønstre. Det skilles mellom om mønstrene først og fremst knyttes til tradisjonell eller til undersøkende matematikkundervisning.

I studien blir det brukt kvalitative forskningsmetoder, i form av observasjon kombinert med lyd- og bildeopptak. Utvalget består av en klasse som arbeider innenfor en undersøkende matematikkundervisning, og en klasse som arbeider innenfor en tradisjonell matematikkundervisning. Datamaterialet blir samlet inn over fire dager med to undervisningsøkter i hver klasse. Gjennom observasjon blir det sett på hva som kjennetegner kommunikasjonen mellom deltakerne i klassen. Dialoger som er typiske for hvordan læreren og elevene kommuniserer med hverandre velges ut og analyseres opp mot de ulike kommunikasjonsmønstrene.

Resultatene fra studien viser at i klassen som arbeider innenfor en undersøkende matematikkundervisning, kommuniserer læreren med enkeltelever eller mindre elevgrupper hovedsaklig gjennom et undersøkende kommunikasjonsmønster. Læreren og elevene deltar da i en felles utforskningsprosess, og læreren tar alltid utgangspunkt i hva eleven selv har tenkt om en oppgave. I helklassesamtaler er både tradisjonelle og undersøkende mønstre typiske for kommunikasjonen. I klassen som arbeider innenfor en tradisjonell matematikkundervisning er det ett bestemt kommunikasjonsmønster som er dominerende. Lærerens samtaler med enkeltelever eller mindre elevgrupper kjennetegnes her av at hun hjelper elevene å løse matematikkoppgaver ved å forklare hvilke regler de skal bruke eller ved å beskrive fremgangsmåten som elevene forventes å følge. I tillegg leder læreren dem frem til svaret gjennom en serie eksplisitte spørsmål eller ved å vise til tidligere løste oppgaver. Læreren tar da ikke utgangspunkt i hva elevene selv har tenkt. Dette mønsteret, kombinert med andre tradisjonelle mønstre, er også typiske for helklassesamtalene.

Summary

In this paper the focus lies on communication between teacher and students in mathematics classrooms. The purpose of the study is to get a deeper view of what defines the communication between the teacher and the students in two different classes who work with mathematics in two different ways. The research question of this paper is: *What defines the communication between the teacher and the students in a class where the teacher uses an inquiry teaching approach, versus a class who works within the traditional way of learning mathematics?* This study uses an analysis tool that consists of theories about different patterns of communication. What separates these patterns is whether or not they are being tied to the traditional or inquiry way of teaching mathematics.

A qualitative method of research is being used in this study. This appears in the shape of observation combined with video and audio recordings. The selection consists of a class where the teacher uses the inquiry way of teaching mathematics, and a class who work within the traditional way of learning mathematics. The recorded material is being collected over a period of four days with two lessons in each class. Dialogues that show typical signs of how the teacher and the students communicate with each other, are being selected and analyzed by being compared to the different patterns of communication.

The results of this study show that the class who work within an inquiry way of learning mathematics has a communication between teacher and students that mainly falls in the category of an inquiry pattern of communication. The teacher and the students take part in a joint inquiry process in which the teacher always makes a starting point of what the students' own thoughts of a task are. In conversations where the class as a whole participates, both traditional and inquiry patterns of communication are common. In the class who work within a traditional way of learning mathematics, there is one certain pattern of communication that dominates. In this pattern the teacher's conversations with a student is characterized by how the teacher helps the student to solve the tasks. The teacher explains which rules to follow or the preferred method for solving the task. The teacher also guides the student toward the solution by means of leading questions, or by showing previously resolved tasks. The teacher does not take a starting point with the student's own thoughts. This pattern, combined with other traditional patterns, is also typical in conversations where the class as a whole takes part

Innhold

Vedlegg

1. Innledning

Min interesse for kommunikasjon mellom lærer og elever i matematikklasserommet begynte i løpet av våren 2010. I forbindelse med min andre praksisperiode deltok jeg da i formidlingsprosjektet S-TEAM (Science-Teacher Education Advanced Methods). Gjennom prosjektet fikk jeg anledning til å utvikle, prøve ut og analysere en rekke undersøkende undervisningsopplegg. I en *undersøkende matematikkundervisning* er det i følge Wæge (2007) fokus på at elevene skal finne og argumentere for egne løsningsstrategier. Videre fokuseres det på samarbeid, matematisk resonnement, problemløsning og å lete etter mønster og systemer. Som en del av prosjektet S-TEAM ble jeg og en medstudent videofilmet mens vi gjennomførte en undersøkende matematikkundervisning i praksisklassen vår. Prosjektet hadde en varighet på fire uker. På slutten av hver uke så jeg og medstudenten gjennom videoopptakene. Vi valgte deretter ut korte sekvenser av filmen som vi ønsket å diskutere med veilederen vår. Sekvensene som ble valgt ut var gjerne en situasjon der en av oss forsøkte å veilede en gruppe elever mens de utviklet egne løsningsstrategier. Sammen med veilederen analyserte vi det som skjedde: Hva gjorde vi bra? Hva kunne gjøres bedre? Hvordan kommuniserte vi med elevene for å hjelpe dem videre i læringsprosessen? Hovedfokuset i prosjektet var på vår kommunikasjon med elevene.

I min første praksisperiode arbeidet jeg innenfor en *tradisjonell matematikkundervisning*, der tavleundervisning og oppgaveregning er dominerende (Alrø & Skovsmose, 2002). I den perioden var jeg lite bevisst på hvordan jeg som lærer kommuniserte med elevene. Jeg stilte ofte elevene spørsmål jeg allerede kjente svaret på, i den hensikt å gjøre en lærermonolog om til en dialog eller for å teste elevenes kunnskap. Denne samtaleformen er et svært vanlig kommunikasjonsmønster i tradisjonell undervisning (Lemke, 1990; Mason, 1998; Wells, 1999; Cazden, 2001). Når elevene arbeidet med matematikkoppgaver, forsøkte jeg å hjelpe dem videre i løsningsprosessen om de sto fast. Jeg prøvde gjerne først å gi et lite hint eller omformulere oppgaven. Dersom det ikke lyktes, pekte jeg på regler elevene kunne bruke eller viste til tidligere løste oppgaver eller eksempler i læreboka. Novotná og Hošpesová (2007) kaller å gi slik hjelp for topazeeffekt. I overgangen fra en tradisjonell til en undersøkende matematikkundervisning, merket jeg at jeg måtte forsøke å endre måten jeg kommuniserte med elevene på. Siden jeg ønsket at elevene selv skulle få utvikle egne løsningsstrategier, måtte jeg passe på å stille gode spørsmål, men ikke gi for mye hjelp. Jeg erfarte at det var vanskelig å endre kommunikasjonen min med elevene. Slik ble jeg interessert i hva som egentlig kjennetegner kommunikasjonen mellom læreren og elevene i en klasse som arbeider på en undersøkende måte med matematikk, og en som arbeider på en tradisjonell måte.

Studien min plasserer jeg innenfor det konstruktivistiske paradigmet (Mertens, 2005). Mitt syn er at virkeligheten er sosialt konstruert og i stadig utvikling. I følge Voigt (1994) kan matematisk mening, ut fra et slikt perspektiv, betraktes som et produkt av sosiale prosesser, spesielt som et produkt av sosiale interaksjoner. Matematisk mening kan da studeres som noe som oppstår mellom individer, ikke som noe som konstrueres på innsiden eller som eksisterer uavhengig av individene. Gjennom sin kommunikasjon med elevene, har dermed læreren stor mulighet til å påvirke elevenes læring (Alrø & Skovsmose, 2002). Kommunikasjonen mellom læreren og elevene i en klasse har lett for å gå inn i visse spor eller mønstre (Bauersfeld, 1980; Voigt, 1994; Voigt, 1995; Bauersfeld, 1988; Mason, 1998). Læreren kan ofte styre hele retningen på kommunikasjonen, og elevene må anstrenge seg for å følge lærerens tankegang. Da vil elevene heller ha fokus på å gjette riktig på hva læreren vil frem til, i stedet for på det matematiske innholdet i temaet (Alrø & Skovsmose, 2002). Videre kan læreren og elevene gå inn i et spor der læreren leder dem frem til det rette svaret på en matematikkoppgave gjennom en serie eksplisitte spørsmål. Læreren senker dermed kravene han har til elevene, og i verste fall krever han kun ett enkelt ord fra dem før han presenterer hele løsningen selv (Bauersfeld, 1988). Andre kommunikasjonsmønstre åpner for at elevene selv må begrunne, argumentere eller forklare egne løsninger (Wood, 1995; Wood, 1998; Alrø & Skovsmose, 2002). Gjennom sin kommunikasjon med elevene, kan læreren altså bidra til både å hemme eller fremme deres læring.

En annen viktig begrunnelse for å studere kommunikasjon, er at verken læreren eller elevene nødvendigvis er klar over hvilket spor samtaler går inn i (Voigt, 1994; Voigt, 1995; Bauersfeld, 1988; Mason, 1998). Læreren kan faktisk gå inn i kommunikasjonsmønstre som strider mot hans hensikt (Bauersfeld, 1988; Voigt, 1994). Av den grunn mener jeg at det er svært viktig som kommende lærer å få innsikt i hvordan lærere snakker med elevene sine. På den måten kan jeg bli mer bevisst på ulike måter å kommunisere på. I følge Mason (1998) kan en lærer klare å snu retningen på en samtale og gå ut av de vanlige mønstrene kun dersom han hele tiden er bevisst på hvordan han snakker med elevene.

1.1 Problemstilling

Min egen erfaring tilsier at ved å gå fra en tradisjonell matematikkundervisning og over til en undersøkende matematikkundervisning, kan kommunikasjonen mellom læreren og elevene endre seg. Alrø og Skovsmose (2002) har observert at en undersøkende matematikkundervisning åpner for at nye kommunikasjonsmønstre kan oppstå. Samtidig har tradisjonelle mønstre stor grad av stabilitet og er vanskelig å gå ut av (Voigt, 1994). Målet med studien er å få innsikt i hva som egentlig kjennetegner kommunikasjonen mellom læreren og elevene i to klasser som arbeider med matematikk på to ulike måter. Problemstillingen i studien er: *Hva kjennetegner kommunikasjonen mellom læreren og elevene i en klasse som arbeider innenfor en undersøkende matematikkundervisning, og i en klasse som arbeider innenfor en tradisjonell matematikkundervisning?*

For å finne svar på problemstillingen, gjennomfører jeg en kvalitativ studie. Jeg besøker to klasser i videregående skole. Den ene klassen arbeider innenfor en undersøkende matematikkundervisning, mens den andre arbeider på en tradisjonell måte med matematikk. Jeg observerer kommunikasjonen mellom læreren og elevene i hver klasse i to undervisningsøkter[1], samtidig som jeg filmer klassen. Videre gir jeg en kort beskrivelse av matematikkundervisningen i hver klasse ut fra fire aspekter ved et klasseroms læringsomgivelser som Cobb (2000) presenterer. Aspektene er 1) klasseromsaktivitetenes struktur, 2) oppgavene elevene arbeider med, 3) verktøy og 4) klasseromsdiskursen. Slik vil jeg gi en situasjonsbeskrivelse for kommunikasjonen og et overordnet bilde av matematikkundervisningen og hvordan læreren og elevene snakker med hverandre. Deretter velger jeg ut dialoger fra det transkriberte videomaterialet som er typiske for hvordan læreren og elevene i hver klasse kommuniserer med hverandre. Dialogene blir analysert opp mot ulike kommunikasjonsmønstre som kan observeres i matematikklasserommet.

Målet med studien er altså å få en dypere innsikt i hvordan matematikklærere kommuniserer med elevene sine. Innsikten kan videre føre til økt bevissthet rundt ulike måter å kommunisere på. Det er spesielt viktig siden kommunikasjonen har en tendens til å gå inn visse spor uten at verken læreren selv eller elevene nødvendigvis er klar over det. En lærer som leser oppgaven min kan selv avgjøre hvorvidt han kjenner seg igjen i de ulike kommunikasjonsmønstrene, og bruke det til å utvikle sin egen måte å kommunisere på.

[1] En undervisningsøkt er 2 x 45 min

1.2 Kapitteloppbygging

Studien er bygd opp av syv ulike kapitler. I kapittel 2 presenterer jeg det teoretiske rammeverket i studien. Jeg starter med å se nærmere på to typer matematikkundervisning: tradisjonell og undersøkende. Videre introduserer jeg begrepene sosial og sosiomatematisk norm og didaktisk kontrakt. Jeg presenterer deretter ulike kommunikasjonsmønstre som kan observeres i matematikklasserommet. Cobbs (2000) fire aspekter ved læringsomgivelsene i et klasserom beskrives til sist i kapittelet. I kapittel 3 presenterer jeg min valgte metodologi. Her går jeg inn på hvilken metode jeg har valgt og gir en beskrivelse av utvalget i studien. Jeg beskriver også gjennomføringen, og hvordan data har blitt analysert. I kapittel 4 gir jeg en kort beskrivelse av matematikkundervisningen i begge klassene. Slik gir jeg en situasjonsbeskrivelse for kommunikasjonen mellom læreren og elevene. Neste kapittel, kapittel 5, er todelt. Først analyserer jeg data fra klassen som arbeider innenfor en undersøkende matematikkundervisning. Deretter analyserer jeg data fra den andre klassen. I kapittel 6 diskuterer jeg resultatene fra studien. Jeg sammenligner også resultatene fra de to klassene. Videre diskuterer jeg den metodiske tilnærmingen. Avslutningsvis, i kapittel 7, foretar jeg en oppsummering av resultatene fra studien.

2. Teoretisk rammeverk

I kapittelet vil jeg presentere det teoretiske rammeverket for studien min. Det danner grunnlaget for analysen av datamaterialet. Jeg vil først presentere to ulike former for matematikkundervisning som kan eksistere i klasserommet: tradisjonell og undersøkende. Her vil begrepene oppgaveparadigmet og oppgavediskursen være viktige for å forstå hva som kjennetegner en tradisjonell matematikkundervisning. En undersøkende matematikkundervisning er et alternativ til den tradisjonelle undervisningen. Den baserer seg på sosiokulturell læringsteori. Jeg vil derfor presentere begrepene den nærmeste utviklingssone og stillasbygging i presentasjonen av en undersøkende matematikkundervisning.

Innenfor ulike matematikkklasserom vil det være forskjellige underliggende ”spilleregler” som danner grunnlaget for hvordan deltakerne kommuniserer med hverandre. Jeg vil gå inn på slike spilleregler og presentere begrepene sosiale og sosiomatematiske normer og didaktisk kontrakt. Videre vil jeg presentere ulike kommunikasjonsmønstre som kan oppstå i matematikklasserommet. På bakgrunn av de underliggende ”spillereglene” vil nemlig kommunikasjonen mellom læreren og elevene i en klasse ofte gå inn i visse spor eller mønstre. I analysen av datamaterialet vil jeg bruke disse for å analysere dialogene mellom læreren og elevene i hver klasse.

Til sist i kapittelet presenterer jeg fire aspekter ved læringsomgivelsene i et klasserom som jeg vil fokusere på i min studie. De brukes for å gi en beskrivelse av matematikkundervisningen og et overordnet bilde av hvordan læreren og elevene i hver klasse kommuniserer med hverandre.

2.1 To typer matematikkundervisning

Her presenterer jeg to typer matematikkundervisning: tradisjonell og undersøkende.

2.1.1 Tradisjonell matematikkundervisning

Alrø og Skovsmose (2002) definerer en *tradisjonell matematikkundervisning* som en matematikkundervisning der tavleundervisning og løsning av rutineoppgaver (ofte fra læreboka) dominerer. Det som kjennetegner en tradisjonell matematikkundervisning er en bestemt måte å organisere klasserommet på. I første del av matematikktimen presenterer læreren nytt stoff, i form av matematisk tema, algoritmer eller matematikkoppgaver. Presentasjonen av det nye stoffet er gjerne svært lik den gitt i læreboka. I andre del av timen arbeider elevene med utvalgte oppgaver. Oppgavene kan vanligvis løses ved å bruke teknikkene som elevene allerede har blitt presentert for, og læreren sjekker ofte elevenes løsninger eller svar. Elevene får også hjemmelekser der de skal arbeide med et visst antall oppgaver fra læreboka. På grunn av den sterke posisjonen læreboka og oppgaver har, kalles en tradisjonell matematikkundervisning gjerne for oppgave- og lærebokstyrt (Wæge, 2007). Skovsmose (2003) mener at å arbeide på en tradisjonell måte med matematikk er å arbeide innenfor *oppgaveparadigmet*, der det er et stort fokus på oppgaveregning.

Skovsmose mener videre at en matematikkundervisning som er strukturert etter oppgaveparadigmet, føyer seg inn i oppgavediskursen beskrevet hos Mellin-Olsen (1990). Mellin-Olsen hadde i sin studie fokus på læreres didaktiske kunnskapsbegrep i matematikk. Et hovedtrekk han la merke til, var at lærernes undervisning var sterkt knyttet til andres forventninger, spesielt i forbindelse med mulighetene for en eksamen. Måten lærerne snakket om håndteringen av kunnskapene i undervisningen beskriver Mellin-Olsen (1990, s. 47) som et spesielt språk. Han kaller språket *oppgavediskursen* og beskriver det som ”et språk og en praksis som læreren utøver med tilknytning til institusjonen, i vårt tilfelle skolen, og til matematikkundervisningens tradisjon.” Bruken av ordet *diskurs* peker i retning av at språk og praksis er knyttet sammen. Mellin-Olsen la merke til at lærerne for eksempel var opptatt av å få elevene gjennom pensum. De brukte begrepene ”komme gjennom”, ”drive på med”, ”følge slavisk” eventuelt ”spare” (om mindre viktig lærestoff) for å beskrive hvordan de arbeidet med pensumet.

Mellin-Olsen observerte videre at hos lærerne var det stort fokus på oppgaveløsning. Matematikkoppgavene kom på rekke og rad til elevene, og hver av dem hadde en begynnelse og en slutt, der slutten var markert med svar i en fasit. Elevene ble vurdert etter hvor langt de var kommet i oppgaverekken. Lærerne snakket mye om at de ”kjørte på” med oppgaver, og for Mellin-Olsen peker lærernes bruk av ”kjøre” i retning av en ferd mot et mål, mot eksamen. Mellin-Olsen hevder også at det er farten som er kjernen i oppgavediskursen. Lærerne brukte ikke ordet ”fart” direkte, men de ga uttrykk for at de følte at tempoet måtte være høyt for å komme gjennom pensum. Enkelte lærere håpet at elevene i det minste fikk med seg ”noen minimumsgreier”; andre følte at de måtte ”jage videre. Til eksamen...” (Mellin-Olsen, 1990, s. 51).

Alrø og Skovsmose (2002) mener at oppgaveparadigmet har en stor påvirkning på flere aspekter ved matematikkutdanningen, både organiseringen av undervisningen, rollen matematikk spiller i samfunnet og kommunikasjonsmønstrene mellom lærer og elever. I følge forfatterne vil kommunikasjonen mellom lærer og elever i en tradisjonell matematikkundervisning ofte følge visse rutiner. I delkapittel 2.3 vil jeg gå nærmere inn på slike kommunikasjonsmønstre.

2.1.2 Undersøkende matematikkundervisning

Som et alternativ til oppgaveparadigmet, beskriver Skovsmose (2003) *undersøkelseslandskapet*. Han tenker seg en undervisningssituasjon der lærer og elever går i dybden og undersøker et matematisk fenomen. Det kan for eksempel være å undersøke tallenes egenskaper. Å arbeide på denne måten er å begi seg inn i undersøkelseslandskapet. Det kjennetegnes av at verken lærer eller elever vet hva de skal frem til, eller hvor de vil ende opp. Det kan starte med at læreren spør: ”Hva hvis…?”, og elevene følger opp med ”Hva hvis…?” Et matematisk fenomen blir slik undersøkt i et samarbeid mellom lærer og elever. Alrø og Skovsmose (2002) understreker at selv om læreren gjerne tar initiativet til å starte en utforskningsprosess, må han *invitere* elevene med. Det er først snakk om et ekte undersøkelseslandskap dersom elevene godtar invitasjonen; læreren kan ikke kommandere dem til å delta. Min tolkning er at undersøkelseslandskapet inngår i en annen form for matematikkundervisning enn den tradisjonelle. Wæge (2007, s.51) beskriver at i en *undersøkende matematikkundervisning* handler matematikk om mer enn å finne et riktig svar. Det handler også om utforskning, kreativitet, nysgjerrighet og samarbeid. Det er en undervisning der fokus er på:

- Matematisk resonnement
- Å lete etter mønster og systemer
- Problemløsning
- Sammenhenger
- Grunnleggende ferdigheter

I en undersøkende matematikkundervisning vil elevene få mulighet til å være aktive og utforskende. Det blir lagt vekt på at elevene selv skal få utvikle egne løsningsstrategier og formulere egne problemstillinger. Derfor arbeides det mye med åpne oppgaver, prosjekter og problemløsning (Wæge, 2007). Ikke alle oppgavene klassen arbeider med vil nok være mulige å strekke så langt at det blir et fullstendig undersøkelseslandskap. Min tolkning er derfor at undersøkelseslandskapet er en del av en undersøkende matematikkundervisning. Yackel (1995) beskriver også at i en undersøkende matematikkundervisning vil elevene få anledning til å delta i det han kaller meningsfull matematisk aktivitet. I likhet med Wæge (2007) mener han at å kunne forklare og argumentere for egne løsninger og egen tenkning er en sentral del. Læreren vil da spille en viktig rolle i å legge til rette for elevenes forsøk på å forklare. På den ene siden kan læreren assistere elevene i det de forsøker å si, for å klargjøre ovenfor de andre deltakerne i klassen. På den andre siden kan læreren hjelpe elevene til selv å forstå det de prøver å forklare. Samtidig mener Yackel at læreren må være forsiktig i sine forsøk på å hjelpe elevene å utvikle mulige løsninger. Læreren kan utilsiktet hemme elevenes forsøk på å forklare. Det kan han gjøre ved at han stadfester at eleven allerede har funnet en mulig løsning. Han kan også lette elevenes ansvar av å selv finne ut hvilke aspekter av løsningene deres som trengs å utdypes og forklares mer.

Alrø og Skovsmose (2002) mener at skiftet fra oppgaveparadigmet og over til undersøkelseslandskapet gir rom for at kommunikasjonsmønstrene i klasserommet kan endres. Det åpnes for nye typer samarbeid og for nye læringsmuligheter. I delkapittel 2.4 vil jeg gå inn på ulike former for kommunikasjonsmønstre som knyttes til en undersøkende matematikkundervisning.

2.1.3 Undersøkende matematikkundervisning og sosiokulturell teori

En undersøkende matematikkundervisning baserer seg på sosiokulturell læringsteori (Goos, 2004; Wæge, 2007). Undervisningen legger til rette for at læring skal skje i samarbeid med andre, noe som er en av grunntankene i et sosiokulturelt perspektiv. Videre betraktes kunnskap innenfor sosiokulturell teori som noe som ikke kan overføres, men som konstrueres. Konstruksjon er alltid knyttet til aktivitet for den lærendes del (Dysthe, 2001). I en undersøkende matematikkundervisning fokuseres det nettopp på at elevene skal være aktive og utforskende, og at de selv skal både finne og argumentere for egne løsningsstrategier (Yackel, 1995; Wæge, 2007).

Innenfor den sosiokulturelle læringsteorien, er altså hvert individ avhengig av andre i sin læringsprosess. På hvert trinn i et barns utvikling vil det for eksempel eksistere enkelte problemer som barnet er på nippet til å klare å løse selv. Oppmuntring til å fortsette å prøve, noen ledetråder, litt struktur osv. kan være det som trengs for at eleven skal få løst problemet.

Vygotsky (1978, s. 85-86) mener derfor at det er viktig å ikke bare fokusere på hva eleven mestrer på egenhånd (det aktuelle utviklingsnivået), men også på hva han får til sammen med andre (det potensielle utviklingsnivået). *Den nærmeste utviklingssonen* (zone of proximal development) er nivået som ligger mellom disse. Det er området der eleven ikke klarer å løse problemet alene, men kan lykkes dersom han får veiledning fra en voksen eller samarbeider med en dyktigere jevnaldrende. Den nærmeste utviklingssonen definerer de intellektuelle funksjonene som ikke enda er ferdig modnet hos den lærende, men som er i modningsprosessen. Vygotsky (1978; 1981, i Ottesen, 2007) mener at det er mot dette nivået undervisningen må rettes, for her er læring mulig. Læringsprosessen kan ses på som en utvikling der elevene først er avhengig av andre (enten lærer eller andre elever) og så gradvis internaliserer kunnskapen slik at de klarer seg på egen hånd.

Et annet begrep som ofte ses i sammenheng med den nærmeste utviklingssonen, er *stillasbygging* (scaffolding). Begrepet viser til at barn bruker hjelpen fra en voksen som en støtte mens de bygger en solid forståelse. Den voksne ”kontrollerer” de elementene av oppgaven som i utgangspunktet er utenfor den lærendes kapasitet, slik at han kan konsentrere seg helt og holdent om de elementene som er innenfor hans kompetanserekkevidde. Støtten tilpasses etter hvert som barnet lærer og fjernes når den lærende er i stand til å ”stå alene” (Wood, Bruner & Ross, 1976, s. 90). Begrepet stillasbygging brukes ofte for å beskrive interaksjonen mellom den voksne og barnet innenfor den nærmeste utviklingssonen (Goos, 2004).

Jeg mener at Yackels (1995) beskrivelse av lærerens rolle relateres til både den nærmeste utviklingssonen beskrevet av Vygotsky (1978) og stillasbygging definert av Wood, Bruner og Ross (1976). Yackel påpeker som tidligere nevnt at læreren skal fasilitere og veilede elevenes forsøk på å forklare egne løsninger og egen tenkning. Da retter han undervisningen inn mot den nærmeste utviklingssonen, slik Vygotsky (1978) etterlyser. Samtidig kan han gi den nødvendige voksenassistansen, stillasbygging, slik at elevene blir i stand til å forstå det de forklarer. I delkapittel 2.4.2 knytter jeg de nevnte begrepene til et spesielt kommunikasjonsmønster, IC-modellen, som kan observeres i en undersøkende matematikkundervisning.

2.2 Underliggende ”spilleregler” i klasserommet

I en klasse vil deltakerne ha visse forventninger til hverandre. Summen av forventningene danner underliggende ”spilleregler” som er med på å påvirke hvordan læreren og elevene kommuniserer med hverandre (Bauersfeld, 1980). Her presenterer jeg slike ”spilleregler” og introduserer begrepene sosiale og sosiomatematiske normer og didaktisk kontrakt.

2.2.1 Sosiale og sosiomatematiske normer

Interaksjon er mer enn bare en rekke av handlinger og mothandlinger. Hver deltaker i interaksjonen vil tilpasse sine handlinger i samsvar med hva han antar er de andre deltakernes bakgrunnsforståelse, forventninger osv. (Voigt, 1994). Bauersfeld (1980) beskriver det han kaller *skjulte dimensjoner* i den såkalte realiteten av matematikklasserommet: Summen av situasjoner, regler, forventninger, tolkninger og subjektive realiteter. Han mener at for en utenforstående kan det faktisk være vanskelig å skjønne hva som foregår i en matematisk diskusjon. Som en forutsetning for kommunikasjon vil nemlig deltakerne måtte ha en felles forståelse som de tar som et implisitt referansegrunnlag når de snakker til hverandre. Tenk at en elev nettopp har presentert en løsning foran klassen, og læreren spør: ”Har noen løst oppgaven på en annen måte?” Da må elevene og læreren ha en felles forståelse for hva som utgjør, matematisk sett, en alternativ løsning.

Sosiale normer er et begrep som refererer til den generelle deltakelsesstrukturen i klasserommet (Gravemeijer & Cobb, 2006). Gjennom en prosess av gjensidige forhandlinger mellom læreren og elevene etableres det forventninger om hvordan man handler og forklarer seg i klasserommet. Yackel og Cobb (1996) fokuserte i sin studie spesielt på klasseromsnormer de kaller for sosiomatematiske normer. En *sosiomatematisk norm* handler om de normative aspektene ved klassediskusjoner som er spesifikke for matematiske aktiviteter (Gravemeijer & Cobb, 2006). Disse skiller seg altså fra generelle sosiale normer ved at de er spesifikke for det matematiske aspektet av det som skjer i klasserommet. For eksempel er den felles forventningen om at elevene skal kunne forklare hvordan de tenker og kunne argumentere for egne løsninger en sosial norm. Forståelsen av hva som utgjør en akseptabel matematisk forklaring er derimot en sosiomatematisk norm (Yackel & Cobb, 1996).

Hvilke sosiomatematiske og sosiale normer som ligger til grunn i to forskjellige klasser, er ikke nødvendigvis de samme. Yackel og Cobb (1996) hadde i sin studie fokus på en matematikklasse som drev med undersøkende matematikkundervisning. De la merke til at forståelsen av hva som utgjorde en sofistikert, elegant eller effektiv løsning var mindre eksplisitt enn forståelsen av hva som utgjorde en ulik løsning. Cobb, Yackel og Wood (1995) fulgte også en matematikklasse som gikk fra å arbeide på en tradisjonell måte med matematikk til å arbeide aktivt og utforskende. På eget initiativ begynte læreren etter hvert å utvikle og endre de sosiale normene i klasserommet slik at de skulle passe bedre med den nye undervisningen. Læreren ga eksplisitt uttrykk for at elevene skulle kunne forklare sin løsning for andre elever og lytte og prøve å forstå andres løsninger både i gruppearbeid og i helklassediskusjoner. Sosiomatematiske og sosiale normer kan dermed være ulike i ulike klasser, men de kan også endres innad i en enkelt klasse. Ofte er det læreren som tar initiativ til endringene, men også elevene er med på å påvirke hvilke normer som preger klassen.

2.2.2 Didaktisk kontrakt

De underliggende sosiale og sosiomatematiske normene i et klasserom, knyttes gjerne til begrepet *didaktisk kontrakt* (Balacheff, 1990). Balacheff (1990) definerer begrepet slik:

> *The rules of social interaction in the mathematics classroom include such issues as the legitimacy of the problem, its connection with the current classroom activity, and the responsibilities of both the teacher and pupils with respect to what constitutes a solution or to what is true. We call this set of rules a didactical contract. A rule belongs to the set, if it plays a role in the pupils' understanding of the related problem and thus in the constitution of the knowledge they construct.* (Balacheff, 1990, s. 260).

Reglene for sosial interaksjon i det matematiske klasserommet inkluderer i følge Balacheff slike tema som legitimiteten til et problem, forbindelsen det har med klasseromsaktivitetene og ansvaret både læreren og elevene har med hensyn til hva som utgjør en løsning eller til hva som er sant. Balacheff kaller mengden av regler for en didaktisk kontrakt.

Wedege, Skott, Wæge og Henningsen (2006) mener, i likhet med Balacheff, at didaktisk kontrakt er et begrep som brukes for å beskrive de eksplisitte og implisitte reglene for sosiale og matematiske samhandlinger i et gitt klasserom. Sentrale temaer i den didaktiske kontrakten er: Hva er matematikk og matematikkutdanning? Hvordan og hvorfor lærer du matematikk? Wedege et al (2006) beskriver et gjensidig virkningsforhold: Den didaktiske kontrakten består av visse regler som påvirker interaksjonen i klasserommet. Samtidig vil samhandlingene i klasserommet kunne virke tilbake og fornye eller endre reglene.

2.3 Tradisjonelle kommunikasjonsmønstre

Alrø og Skovsmose (2002) mener at kommunikasjon mellom lærer og elever i en tradisjonell matematikkundervisning ofte vil følge visse rutiner. Rutinene kalles gjerne tradisjonelle kommunikasjonsmønstre. Voigt (1994) viser til studier der det er observert at de tradisjonelle kommunikasjonsmønstrene er svært stabile. Læreren og elevene i en klasse kommuniserer med hverandre ut fra de regler og forventninger de allerede har til hverandre (Bauersfeld, 1980; Bauersfeld, 1988; Voigt, 1994; Voigt, 1995). Sporet kommunikasjonen går inn i endres derfor ikke så lett. Det er årsaken til at selv i undervisningssituasjoner som i utgangspunktet ikke følger et spesielt tradisjonelt mønster, kan tradisjonelle kommunikasjonsmønstre likevel observeres (Voigt, 1994).

2.3.1 IRE/IRF-mønster

Det kommunikasjonsmønsteret som oftest forekommer i tradisjonell undervisning er IRE/IRF-mønsteret; en tredelt sekvens bestående av lærerInitiering, elevRespons og lærerEvaluering/lærerFeedback (Lemke, 1990; Wells, 1999; Cazden, 2001) Mønsteret er ikke knyttet til matematikk spesielt, men kan observeres i alle fag. IRE/IRF-mønsteret innledes med at læreren stiller et spørsmål som oppmuntrer til elevsvar. En utvalgt elev svarer på spørsmålet og læreren kommenterer svaret. Dersom lærerens kommentar er av evaluerende karakter, for eksempel en vurdering om elevens svar er riktig eller galt, er siste del av interaksjonen en lærerEvaluering (Cazden, 2001). Wells (1999) påpeker at læreren ofte følger opp elevens svar, enten ved å utdype selv eller stille et nytt spørsmål. Han mener derfor at betegnelsen lærerFeedback er mer korrekt å bruke. Lemke (1990, s. 8) kaller mønsteret for den *tredelte dialogen* (triadic dialogue) og mener at en typisk sekvens vil være:

(Lærerforberedelse)

Spørsmål fra lærer

(Lærer ber elevene svare (stillhet))

(Elevene gir tegn til å ville svare (rekker opp hendene))

(Utvelgelse av elev til å svare)

Elevsvar

Lærerevaluering

(Lærer gir tilleggsinformasjon)

I likhet med Cazden (2001) bruker Lemke (1990) lærerEvaluering som betegnelse på lærerens respons på elevsvaret. Delene med uthevet skrift er i følge forfatteren de essensielle og er alltid en del av mønsteret. Trekkene i parentes er valgfrie og kan sløyfes. Dersom læreren og elevene holder seg "strengt" til den tredelte dialogen, kan de andre trekkene også være viktige elementer. For eksempel kan utvelgelse av elev til å svare være en viktig del av den tredelte dialogen i enkelte klasserom (Lemke, 1990).

Frekvensen av forekomsten av IRE/IRF-mønsteret kan ha en betydelig variasjon, men det er estimert at denne formen for kommunikasjon utgjør opptil 70 % av all kommunikasjon mellom lærer og elever i tradisjonelle klasserom (Wells, 1999). Cazden (2001) påpeker at IRE/IRF-mønsteret har blitt en "default option" – et spor lærer og elever går inn i om ingen foretar en bevisst endring. Studier gjort av Lemke (1990) har også vist at både elever og lærere har en sterk tendens til å bøye seg for "reglene" i den tredelte dialogen. Det kan ofte oppstå forvirring blant elevene om læreren for eksempel ikke gir dem en evaluerende kommentar på svaret, slik de forventer. I en klasse der læreren og elevene holder seg "strengt" til reglene i den tredelte dialogen, kan en elev faktisk bli nødt til å gjenta svaret sitt, dersom læreren ikke har valgt han ut på forhånd. Først da læreren har fått pekt ham ut til å svare, får eleven lov til å gi sitt svar. Selv om både elever og læreren bidrar til å opprettholde den tredelte dialogen, mener Lemke at hovedansvaret ligger hos læreren. Kommunikasjon innenfor IRE/IRF-mønsteret gir læreren mange fordeler; han bevarer kontrollen over klassen og temaet som diskuteres. Det stiller forfatteren seg noe kritisk til. Dersom læreren har hele kontrollen, vil elevene få for liten mulighet til å ta initiativ selv og styre retningen på diskusjoner.

En annen kritikk som ofte rettes mot IRE/IRF-mønsteret, er at læreren stiller for mange spørsmål som han allerede kjenner svaret på (Cazden, 2001; Mason, 1998). I følge Mason (1998) har spørsmålene som hensikt å teste elevenes kunnskap, og Cazden (2001) påpeker at de også kan fungere som en måte å gjøre en lærermonolog om til dialog med elevene. Selv om en monolog gjøres om til en dialog, gir IRE/IRF-mønsteret likevel ikke læreren nok mulighet til å få innsyn i elevenes tanker (Wells, 1999). Videre kritiseres mønsteret fordi det ikke gir rom for at elevene kan få stille egne spørsmål (Lemke, 1990; Wells, 1999)

2.3.2 Topazeeffekten

Et kommunikasjonsmønster som også kan observeres i matematikkundervisningen, er topazeeffekten beskrevet av Brousseau (1997). Jeg har valgt å plassere topazeeffekten innenfor tradisjonelle kommunikasjonsmønstre. Begrunnelsen er at jeg knytter forekomsten av mønsteret spesielt til en undervisning der det er stort fokus på oppgaveløsning og å finne det rette svaret, noe som er typisk for en tradisjonell matematikkundervisning (Mellin-Olsen, 1990; Alrø & Skovsmose, 2002; Skovsmose, 2003).

Begrepet topazeeffekten stammer fra et fransk skuespill av Marcel Pagnol kalt ”Topaze”. Topaze er professor, og i den første scenen i skuespillet holder han diktat for en svak student. Han vil gjerne at studenten skal lykkes, så han forsøker først med overtydelig uttalelse av ordene han leser opp. Da det ikke er nok, bidrar han med mer hjelp, helt til studenten har stavet hele setningen korrekt. *Topazeeffekten* kan altså beskrives på følgende måte: Læreren vil gjerne at elevene skal være aktive og selv komme frem til svaret. Men i det de ikke får til dette, vil han forkle det forventede svaret på ulike måter uten å gi det direkte. Læreren vil gjerne begynne med å gi en elev som står fast et hint. Dersom det ikke er nok, kan han stille eleven enklere spørsmål for å avgrense oppgaven og gjøre den lettere å forstå. Slik starter topazeeffekten. I verste fall kan sluttresultatet bli at læreren rett og slett forteller eleven hva han skal skrive. I tilfellet med professoren Topaze og studenten hans vil det være at han sier f.eks. ”Husk at å sette ”w” i ”two” (Brousseau, 1997, s. 25).

Novotná og Hošpesová (2007) studerte forekomsten av topazeeffekten i en 8.kl (14-15 år gamle elever). De fulgte klassen i ti etterfølgende 45 minutters økter innenfor temaet lineære likninger. Ulike former for topazeeffekt ble identifisert, og et hovedskille går mellom om hjelpen fra læreren blir *gitt eksplisitt* eller *foreslått/hintet implisitt*.

En eksplisitt form for topazeeffekt som ble observert i studien var at læreren beskrev de ulike stegene eller fremgangsmåten som eleven(e) forventes å følge. Videre kunne læreren stille spørsmål direkte relatert til den følgende løsningsprosedyren. Andre former for eksplisitt topazeeffekt innebærer å advare om mulige feil som kan bli begått eller minne elevene om hva de må huske på, som i ”Pass på, her må du...”. Læreren som var i fokus i studien til Novotná og Hošpesová pekte også ofte på en analogi. Hun viste til tidligere løste lignende problemer eller eksempler dersom elevene sto fast. Andre ganger minnet hun elevene på tidligere erfaring eller kunnskap.

Implisitte former for topazeeffekt som ble observert i studien var at læreren omformulerte oppgaven eller spørsmålet. Hun brukte også signalord, for eksempel å poengtere eller vektlegge viktige stikkord i oppgaveteksten. Dersom læreren ville frem til ett bestemt svar, var det flere tilfeller der hun selv sa første del eller første bokstav i ordet. Denne metoden valgte hun dersom det var vanskelig å finne et passende spørsmål å stille elevene. En annen form for implisitt topazeeffekt som ble identifisert i studien var at læreren betvilte korrektheten av svaret, dersom elevens svar var galt. Da stilte hun gjerne spørsmål som: ”Virkelig? Er du sikker?” eller ”Hørtes ikke det rart ut?”

Det som kjennetegner topazeeffekten er i følge Brousseau (1997) at det forventede svaret på en matematikkoppgave er bestemt på forhånd. Læreren leder da elevene frem til svaret, gjennom en eller flere av de ulike formene for eksplisitt eller implisitt hjelp. Kunnskapen som elevene trenger for å komme frem til svaret endres i løpet av den prosessen og kan i verste fall forsvinne helt (Brousseau, 1997). I det elevene går i gang med en matematikkoppgave er det altså en viss mengde kunnskap som trengs for å løse den. Gjennom at læreren forkler det forventede svaret, vil det i de aller fleste tilfeller føre til at det settes lavere intellektuelle krav til elevene. Kravene som stilles vil være lavere enn de som faktisk kreves for å løse den gitte oppgaven (Novotná & Hošpesová, 2007).

Novotná og Hošpesová (2007) fant at det var en nær sammenheng mellom lærerens forestillinger om matematikkundervisning og forekomsten av topazeeffekten. Læreren hadde en forestilling om at elevenes suksess i matematikk bare kunne oppnås ved gjentatte utførelser av en serie lignende prosedyrer. Hun mente at elevene trengte støtte som i topazeeffekten for å kunne lykkes med oppgavene. Faktisk ga læreren uttrykk for at elevene ikke ville være i stand til å arbeide individuelt uten noen form for hjelp eller støtte. Novotná og Hošpesová har funnet i studien sin at prisen av hyppig bruk av topazeeffekten kan være høy: Elevene kan bli avhengige av lærerens hjelp og tar derfor mindre ansvar selv for å løse de tildelte matematiske problemene.

2.3.3 Traktmønster

I en situasjon der en elev har avgitt et galt svar innenfor IRE/IRF-mønsteret, vil læreren bare fortelle eleven at svaret er galt, og så velge ut en annen til å svare korrekt. I stedet for å avvise elevens svar, kan læreren velge en alternativ strategi (Wood, 1998). Bauersfeld (1988) og hans kolleger observerte en rekke situasjoner fra matematikklasserommet og ble etter hvert oppmerksomme på et annet gitt mønster som deltakerne så ut til å følge ubevisst. For at eleven selv skulle få komme frem til det rette svaret, forsøkte læreren å hjelpe ham ved å lede ham gjennom en serie eksplisitte, enkle spørsmål. Bauersfeld (1988, s. 36) ga fenomenet navnet *traktmønsteret* (funnel pattern of interaction). Bakgrunnen er at han mente at en trakt var en passende metafor, siden spørsmålene læreren stilte ofte begynte som åpne, men ble stadig mer snevre. Traktmønsteret er i følge Kang og Kilpatrick (1992) et eksempel på eller en underkategori av topazeeffekten. Mønsteret kan typisk foregå slik: Læreren ser at en elev har problemer med en matematikkoppgave; han har enten fått feil svar eller sitter fast. For å hjelpe eleven videre i løsningsprosessen vil læreren da stille et åpent spørsmål. Når han ikke får en tilfredsstillende reaksjon fra eleven, i form av ingen eller feil respons, vil han gi den nødvendige informasjonen slik at eleven kan komme med en ”passende” reaksjon. ”Passende” vil si å gi det svaret læreren forventer å høre. Dersom eleven fortsatt svarer avvikende vil læreren presse på videre og stille mer presise og snevre spørsmål for å stimulere det forventede svaret. Kvaliteten på lærer-elev diskusjonen vil synke, siden læreren stadig senker kravene han har til eleven. Steg for steg vil læreren gjennom sine handlinger redusere sine antagelser om hva eleven er kapabel til, stikk i strid mot egne intensjoner. Han vil kanskje ikke engang se det selv; han tror at han gir ”tilrettelagt veiledning”. Eleven på sin side forstår at kravene som stilles til ham stadig forenkles og snevres inn, og at læreren søker etter et gitt svar. Spenningen mellom lærer og elev vokser. Dersom eleven ikke klarer å følge lærerens tankegang gjennom de stadig mer presise spørsmålene, vil han ha liten sjanse for å svare riktig. På et sent stadium vil læreren faktisk kunne avvise svar på et åpent spørsmål stilt tidligere. Jeg tolker Bauersfeld (1988) slik at læreren på det tidspunktet vil være svært fokusert på å få eleven til å svare korrekt på det nyeste, presise spørsmålet. Av den grunn vil han ikke anerkjenne svar gitt på et mer åpent spørsmål stilt tidligere. Til slutt kan et enkelt ord fra eleven være nok til at læreren selv presenterer den fullstendige løsningen. Traktmønsteret avsluttes alltid med at løsningen blir presentert, uavhengig av hvem som produserer den (Bauersfeld, 1988).

Gjennom traktmønsteret vil altså læreren senke kravene han har til eleven. Et åpent spørsmål som stiller visse intellektuelle krav til eleven snevres inn til presise, eksplisitte spørsmål som krever mindre å svare på. Slik er traktmønsteret et eksempel på topazeeffekten (Kang & Kilpatrick, 1992). Min vurdering er at traktmønsteret kan kobles spesielt til en bestemt form for eksplisitt topazeeffekt beskrevet av Novotná og Hošpesová (2007): Spørsmål direkte relatert til den følgende løsningsprosedyren.

Bauersfeld (1988) påpeker at verken læreren eller elevene alene kan klandres for sporet kommunikasjonen går inn i, fordi de ikke er klar over selv hvilken retning handlingene deres tar. Steinbring (1998) mener at det er forpliktelsen av at enhver matematikktime skal føre frem til et gitt mål som ofte er årsaken til at traktmønsteret oppstår. Det kan igjen kobles til ”farten” beskrevet hos Mellin-Olsen (1990), og presset lærere føler i forhold til å få elevene gjennom pensum eller læreplanen.

Mason (1998) mener at traktmønsteret kan være effektivt, uten å presisere på hvilken måte det er effektivt. Jeg tolker Mason slik at traktmønsteret er effektivt i den forstand at eleven, gjennom lærerens serie av spørsmål, får løst oppgaven. Mason påpeker likevel at hvis det blir en vane, hvis det ikke eksisterer alternativer, da er læreren fanget i en potensiell sammensvergelse med elevene som tvilsomt vil styrke læring. Holt (1964, i Mason 1998) beskriver en episode der han etter hvert ble klar over at en elev hadde utarbeidet en strategi av minimal respons helt til spørsmålene ble så enkle at det ikke krevde noen innsats å svare på dem. Mason oppmuntrer derfor lærere til å forsøke å unngå å bli fanget i traktmønsteret. Steinbring (1998) peker også på mulige problemer med mønsteret. Han mener at dess mer læreren forsøker å gjøre ny kunnskap eksplisitt gjennom traktmønsteret, dess mer vil den miste sin nye, teoretiske status og kan ofte ødelegges. Elevene får mindre anledning til å konstruere personlige ideer om den aktuelle kunnskapen. Wood (1998) er enig i dette, og han mener at traktmønsteret gir eleven liten mulighet til å delta i en meningsfull matematisk aktivitet. Han hevder at kommunikasjonsmønsteret formidler et syn på at matematikken som skal læres ligger utelukkende innenfor lærerens autoritet. Lærerens hensikt er å hjelpe elevene til å lære ved å lede dem til det rette svaret. Likevel vil det å lære matematikk, fra elevenes perspektiv, involvere å bli kjent med en mengde prosedyrer som læreren allerede kjenner, og som det er deres forpliktelse å lære. Steinbring har videre observert at elevene kan komme til å bli avhengige av lærerens hjelp og bli mindre selvstendige.

2.3.4 "Gjett hva læreren tenker"-mønsteret og stikkordsbasert oppførsel

Et annet kommunikasjonsmønster, som jeg mener har nært slektskap med både traktmønsteret og IRE/IRF-mønsteret, er "*gjett hva læreren tenker"-mønsteret*: Læreren stiller elevene et spørsmål, og elevene forsøker å gjette seg frem til hva han vil at de skal svare (Mason, 1998; Alrø & Skovsmose, 2002). I følge Alrø og Skovsmose (2002) kjennetegnes mønsteret av at læreren stiller en serie spørsmål som han allerede kjenner svaret på. Det er stort fokus på å svare riktig, og et korrekt svar vil føre til et nytt spørsmål. Læreren styrer altså hele retningen på kommunikasjonen, og elevene må anstrenge seg for å følge lærerens tankegang. Selv om læreren vet hva han vil frem til og kjenner hensikten med spørsmålene, er det ikke sikkert at elevene skjønner det. For elevene kan dermed spørsmålene virke usammenhengende. Siden de må bruke mye tid og krefter på å gjette hva læreren tenker, har de gjerne fokus på å gjette riktig, i stedet for å konsentrere seg om det matematiske innholdet i temaet. Alrø og Skovsmose beskriver flere ulike typer elevresponser innenfor "gjett hva læreren tenker"-mønsteret. Elevene kan velge å gjette tilfeldig, ikke svare i det hele tatt, eller late som om de opptatt med noe annet. De kan også gi et spørrende svar eller svare for så å avslå eget svar. Videre kan elevene spørre om hjelp, nekte for å kjenne svaret eller gi et ekko-svar: "Jeg fikk det samme som ham!". Alrø og Skovsmose mener at elevenes respons i et "gjett hva læreren tenker"-mønsteret viser at de da tar minimalt med ansvar for egen læring.

"Gjett hva læreren tenker"-mønsteret relaterer jeg til en type elevoppførsel som Boaler (1998; 1999) kaller for *stikkordsbasert* (cue-based behaviour). Boaler (1998; 1999) observerte i sin studie at elever som arbeidet på en tradisjonell måte med matematikk ofte baserte sin matematiske tenkning på hva de trodde ble forventet av dem, heller enn på det matematiske innholdet i et spørsmål. Hun la merke til at elevene brukte ikke-matematiske stikkord (cues) som indikator på lærerens eller lærebokas hensikt. Stikkordene som elevene baserte sin tenkning på, kunne være for eksempel hvilke ord læreren brukte i et spørsmål eller stemmeleiet hans. Videre svarte elevene i forhold til den forventede vanskelighetsgraden på et spørsmål (hva de trodde ble forventet av dem på et gitt stadium) eller konteksten til spørsmålet. Jeg mener at en stikkordsbasert oppførsel lett kan forekomme om læreren kommuniserer gjennom "gjett hva læreren tenker"-mønsteret.

2.4 Undersøkende kommunikasjonsmønstre

Skiftet fra oppgaveparadigmet og over til undersøkelseslandskapet gir rom for at kommunikasjonsmønstrene i klasserommet kan endres. Det åpnes for nye typer samarbeid og for nye læringsmuligheter (Alrø & Skovsmose, 2002). Innenfor en undersøkende matematikkundervisning vil det derfor kunne eksistere andre typer kommunikasjonsmønstre enn i en tradisjonell undervisning. Det betyr likevel ikke at ikke tradisjonelle mønstre også kan observeres (Voigt, 1994). Den ene årsaken til det er at tradisjonelle mønstre har stor grad av stabilitet. Dersom en lærer skal endre matematikkundervisningen fra tradisjonell og over til en mer undersøkende form, kan det ta lang tid å endre de underliggende "spillereglene" i klasserommet (Voigt, 1994; Cobb, Yackel & Wood, 1995). Som nevnt innledningsvis vil verken læreren eller elevene heller alltid være bevisst klar over hvilket spor kommunikasjonen går inn i (Bauersfeld, 1988; Voigt, 1994). En undersøkende matematikkundervisning åpner dermed for at nye kommunikasjonsmønstre kan oppstå, men tradisjonelle mønstre kan fortsatt bli observert.

2.4.1 Fokuseringsmønster

Et kommunikasjonsmønster som i følge Wood (1995, s.219) tilsynelatende kan minne om traktmønsteret er *fokuseringsmønsteret* (focusing pattern of interaction). Fellestrekket er at begge gjerne involverer at læreren stiller en serie spørsmål. Men forskjellen er viktig: I traktmønsteret har læreren på forhånd avgjort hvilket svar han vil at elevene skal komme frem til, og han leder dem inn mot det. I fokuseringsmønsteret, derimot, stiller læreren spørsmål for å snevre elevenes oppmerksomhetsfelt inn mot et gitt aspekt ved en løsning eller en oppgave. Deretter trekker han seg tilbake og lar elevene selv løse oppgaven, på den måten de ønsker. Et typisk eksempel på fokuseringsmønsteret kan være: En eller flere elever har presentert sine løsninger på en matematikkoppgave foran klassen. Læreren legger merke til at en av løsningene kan være vanskelig for andre elever å forstå eller har et spesielt interessant trekk ved seg som han ønsker at de andre skal bli klar over. Da kan han gjerne stille spørsmål som: "Nå, hvordan fant du ut det?" Hensikten med å stille spørsmålet er å fokusere elevenes oppmerksomhet mot et gitt aspekt ved løsningen (Wood, 1995; Wood, 1998).

Ved å stille et fokuserende spørsmål gir læreren den eleven som forklarer sin løsning en ekstra mulighet til å reflektere over egen tenkning mens han forklarer for andre. Resten av klassen får mulighet til å selv prøve å forstå det unike aspektet ved en gitt løsning (Wood, 1995).

2.4.2 IC-modellen

Et annet kommunikasjonsmønster som kan ses i en undersøkende matematikkundervisning er det Alrø og Skovsmose (2002, s. 62) kaller *IC-modellen* (inquiry co-operation model). Modellen består av elementene: komme i kontakt, lokalisering, identifisering, forhandling, høyttenkning, omformulering, utfordring og evaluering.

En av de viktigste forutsetningene for kommunikasjon i IC-modellen er aktiv lytting. Alrø og Skovsmose (2002) presiserer at de bruker begrepet aktiv da den som lytter har et ansvar for å stille spørsmål og gi ikke-verbal støtte mens han forsøker å forstå den som snakker. Aktiv lytting betyr at læreren og elevene kommer i kontakt. "*Å komme i kontakt*" betyr mer enn at læreren ber om oppmerksomhet. Det handler om at læreren og eleven retter seg inn mot hverandre for å samarbeide. Det er den første betingelsen for gjensidig undersøkelse. Videre kan læreren *lokalisere* elevens perspektiv ved å for eksempel spørre eleven om hvordan han oppfatter et gitt matematisk problem. Ofte kan det være vanskelig for eleven å uttrykke matematiske ideer eller generelt forklare hva han tenker om problemet. Læreren kan da fungere som en fasilitator ved å stille undersøkende spørsmål, mens han prøver å forstå elevens måte å oppfatte problemet på. Å fasilitere elevenes forsøk på å forklare er i følge Yackel (1995) en svært viktig del av lærerens rolle i en undersøkende matematikkundervisning. Dersom læreren klarer å hjelpe eleven med å uttrykke sine matematiske ideer, mener jeg at han bidrar med stillasbygging (Wood, Bruner & Ross, 1976). Han retter dermed undervisningen inn mot den nærmeste utviklingssonen, slik Vygotsky (1978) etterlyser. I lokaliseringsfasen kan læreren altså hjelpe eleven å uttrykke det han ikke er stand til å forklare på egenhånd. For å få informasjon om hva eleven tenker, kan læreren stille undersøkende spørsmål som "Hva om...?", "Hvorfor det?" eller "Hvorfor tenkte du sånn?". Alrø og Skovsmose nevner ikke undersøkende spørsmål alene som et av elementene i IC-modellen, men jeg mener likevel at det er en sentral av modellen. Dersom eleven har vanskeligheter med å uttrykke sin måte å oppfatte et gitt problem på, kan spørsmålene hjelpe ham med å sette ord på det han tenker.

Da eleven er blitt i stand til å uttrykke sitt perspektiv, kan det omsettes til mer matematisk språk. Slik blir elevens tanker om problemet *identifisert* i matematisk terminologi; ikke bare av læreren, men også av eleven selv. Prosessen ved identifisering vil dermed legge et grunnlag for videre utforskning. På lokaliserings- eller identifiseringsstadiet kan det også forekomme at prosessen tar en annen retning, og at det blir eleven som forsøker å skjønne lærerens perspektiv. Da tolker jeg Alrø og Skovsmose (2002) som at kommunikasjonen ikke lenger følger IC-modellen. En viktig betingelse for at en dialog skal kunne klassifiseres som en IC-modell, er nemlig at læreren tar utgangspunkt i elevens oppfattelse av problemet.

Neste steg i IC-modellen er *forhandling.* Lærer og elev kan begge komme med ideer og synspunkter på hvordan problemet kan løses, ikke presentert som i ”slik skal det gjøres”, men som noe som kan undersøkes videre. Forhandling betyr å argumentere for og diskutere mulige løsningsstrategier; det finnes ikke en ”rett” metode. En sentral del av forhandlingsfasen er *høyttenkning,* der perspektiv og tanker blir synliggjort for den andre som deltar i interaksjonen. For å få klarhet i perspektivene, kan læreren gjerne *omformulere* elevens utsagn. Gjennom omformulering kan læreren sjekke at han virkelig forstår hva eleven mener. På samme måte kan eleven omformulere lærerens formuleringer for å bli sikker på han forstår lærerens perspektiv. Slik forhindres mulige misforståelser i å oppstå, og læreren og eleven kan komme frem til en felles forståelse. Videre kan læreren gi eleven en *utfordring* for at han skal kunne fortsette utforskningsprosessen. Utfordringen bør tilpasses elevens nivå og oppfattelse av problemet. Samtidig må også læreren være innstilt på å bli selv bli utfordret og begi seg inn i et ukjent ”terreng”. Til slutt kan læreren og eleven *evaluere* om de har sett problemet fra samme synspunkt, og om de har prøvd å løse problemet på samme måte. Misforståelser kan oppstå i kommunikasjon mellom lærer og elev, og de kan ofte ha ulike perspektiv på et problem. For eksempel vil en lærer gjerne se problemet i en større sammenheng og trekke det generelle ut fra det spesielle. Eleven på sin side betrakter ofte problemet som et konkret, praktisk et. Målet i en utforskningsprosess er ikke å ha det ”rette” perspektivet, men å ta et felles ansvar for prosessen. Fokuset skal ikke være på hva som er ”rett” eller ”galt”. På bakgrunn av det kan læreren og eleven evaluere perspektivene sine, og det gir også rom for å diskutere hva eleven har lært.

En viktig betingelse for at en dialog skal kunne klassifiseres som en IC-modell, er som tidligere nevnt at læreren tar utgangpunkt i elevens perspektiv. Alrø og Skovsmose (2002) mener at å undersøke elevenes perspektiv kan være en viktig ressurs for læring. På den ene siden får læreren mulighet til å ta del i hvordan elevene tenker. Samtidig hjelper det elevene å bli bevisste på hvordan de selv resonnerer. Det skal altså være elevenes perspektiv og ikke lærerens forklaringer som er utgangspunktet for et undersøkende samarbeid (inquiry co-operation).

Alrø og Skovsmose (2002) understreker at selv om de har beskrevet et kommunikasjonsmønster som består av gitte elementer, må ikke nødvendigvis alle elementene være til stede. De trenger heller ikke å forekomme i den rekkefølgen som de har beskrevet. Faktisk er det sjelden at fullt utviklede IC-modeller blir observert. Derimot er det vanligere å se mini-IC-modeller. Slik jeg tolker Alrø og Skovsmose, må heller ikke alle elementene i IC-modellen være til stede i en og samme samtale. Læreren kan gjerne forlate en elev eller en gruppe elever etter f.eks. forhandlingsfasen, og så senere returnere for å gi ny utfordring eller evaluere elevenes arbeid. Videre mener jeg at selv om Alrø og Skovsmose i utgangspunktet beskriver en samtale mellom to stykker (lærer og enkeltelev), kan det gjerne være flere deltakere i IC-modellen. Samarbeid mellom elever er en sentral av en undersøkende matematikkundervisning (Wæge, 2007). Derfor mener jeg at en samtale mellom elever som samarbeider og læreren gjerne kan klassifiseres som en IC-modell, dersom den oppfyller de andre betingelsene for å være et undersøkende samarbeid.

2.5 Andre kommunikasjonsmønstre

Ikke alle kommunikasjonsmønstrene er knyttet til en spesiell type undervisning. Her presenterer jeg et mønster som jeg mener ikke er verken typisk tradisjonelt eller undersøkende.

2.5.1 Tematisk mønster

Voigt (1994) mener at matematisk mening er et produkt av sosiale prosesser, spesielt et produkt av sosiale interaksjoner. Han viser til at matematiske objekter har en tvetydighet. Hva er for eksempel meningen av tallet 5 for et barn i en gitt situasjon? Er meningen bundet til konkrete ting (fem fingrer på en hånd), minner det barnet om tidligere hendelser, relaterer barnet tallet til andre andre tall (2 pluss 3 er 5) osv? I følge Bauersfeld (1980) vil ikke et matematisk objekt nødvendigvis i utgangspunktet bety det samme for hver deltaker i klasserommet. Siden læreren og elevene hans har forskjellig bakgrunnskunnskap, er det naturlig at de kan ha ulik forståelse av et matematisk begrep (Voigt, 1994). Men gjennom interaksjon endres meningen; Bauersfeld (1980) mener at det skjer en sammenfatning av mening gjennom menneskelig interaksjon. Voigt (1994) har observert at meningen forhandles frem mellom lærer og elever, både eksplisitt og implisitt.

Gjennom forhandlingene vil læreren og elevene danne seg et nettverk av matematiske meninger som blir forstått som felles. Med uttrykket ”forstått som felles” (taken as shared) mener Voigt (1995, s. 172-173) at deltakerne i klasserommet har en overbevisning om de andre deler deres meninger, eller at de er villige til å sette til side mulige tvil ved uunngåelige tvetydigheter. Voigt (1994, s. 283; 1995, s.174) kaller nettverket av gitte meninger for et *matematisk tema* (mathematical theme). Å sammenligne to oppgaver med hensyn til ulikheter og samsvar mellom dem er et eksempel på et matematisk tema. En elev kan typisk si om en oppgave: ”Den er jo helt lik den forrige”. Men hva mener han egentlig med det? Gjennom forhandlinger kan deltakerne i en klasse bli enige om hva det betyr at en oppgave er lik en annen. De som kommuniserer med hverandre vil gjerne forvente at den andre ”leser mellom linjene”. Fordi læreren ikke har noen forsikring mot elevenes kreativitet, kan de komme med originale bidrag til utviklingen av temaet. Læreren kan ikke være sikker på at elevene bidrar slik han forventer og ønsker. Når læreren og elevene sammen utvikler et matematisk tema, oppstår det Voigt (1995, s.184) kaller et *tematisk mønster* (thematic pattern). I et tematisk mønster Voigt (1995) beskriver som *direkte matematisering* vil en fortelling eller et bilde bli tolket som en spesifikk matematikk/beregningsoppgave, mens andre mulige tolkninger ikke blir vurdert. Læreren har da gjort seg opp en mening som hvordan oppgaven skal forstås. Om elevene oppfatter den annerledes, vil han gjerne bare fortelle elevene hvordan oppgaven skal løses. Dersom det skjer, er det min vurdering at det oppstår en topazeeffekt: Læreren leder elevene frem til svaret gjennom å fortelle hvordan de skal løse oppgaven. Et mulig faremoment med at læreren og elevene danner seg et nettverk av meninger som blir forstått som felles, er at alternative tolkninger av en matematisk oppgave, problem eller spørsmål vil bli oversett. Som i direkte matematisering, kan læreren komme til å overse innspill fra elevene og heller oppmuntre dem til å følge en bestemt løsningsmetode (Voigt, 1994; Voigt, 1995).

2.6 Læringsomgivelsene i klasserommet

For å gi et overordnet bilde av hvordan læreren og elevene i hver klasse kommuniserer med hverandre og for å gi en situasjonsbeskrivelse for kommunikasjonen, vil jeg beskrive matematikkundervisningen i begge klasse. Det danner grunnlaget for å gå i dybden på hvordan deltakerne i klasserommet snakker med hverandre.

Cobb (2000) presenterer fire aspekter som kan belyse læringsomgivelsene i et matematikklasserom. De fire aspektene er:

- Klasseromsaktivitetenes struktur
- Oppgavene elevene arbeider med
- Verktøyet

- Klasseromsdiskursen

Klasseromsaktivitetenes struktur omhandler hvordan timen er bygget opp og hvilke aktiviteter som skjer når. I en tradisjonell matematikkundervisning vil tavleundervisning og arbeid med oppgaver fra læreboka dominere. Timen vil normalt starte med at læreren gjennomgår nytt stoff. Presentasjonen er ofte svært lik den gitt i læreboka (Alrø & Skovsmose, 2002). I en undersøkende matematikkundervisning er strukturen av klasseromsaktivitetene delt på en annen måte. I starten av timen er det gjerne en dialog mellom lærere og elevene der nytt tema introduseres. Videre arbeider elevene individuelt eller i grupper på 2-4 elever, der elevene forsøker å finne egne metoder og løsningsstrategier. Det er fulgt av en klassediskusjon og refleksjon om elevenes strategier og løsninger. Til slutt i timen arbeider elevene med oppgaver (Wæge, 2007).

Det neste aspektet ved et klasseroms læringsmiljø er matematikkoppgavene elevene arbeider med (Cobb, 2000). I en tradisjonell matematikkundervisning arbeides det i hovedsak med oppgaver fra læreboka (Alrø & Skovsmose, 2002). Oppgavene kommer gjerne på rekke og rad til elevene, der hver er markert med svar i en fasit (Mellin-Olsen, 1990). Innenfor en undersøkende matematikkundervisning arbeides det derimot mer med åpne oppgaver, problemløsning eller prosjekter. Målet er da at elevene skal få mulighet til å utvikle egne løsningsstrategier, se sammenhenger og lete etter mønster og systemer (Wæge, 2007).

Cobb inkluderer videre elevers bruk av verktøy som et aspekt ved læringsmiljøet. Aktuelle verktøy kan være vanlig kalkulator, PC, digitale matematikkprogram eller konkreter. I tillegg til å se på hvilke verktøy elevene bruker, er det viktig å se på hvordan de faktisk benytter verktøyene.

Klasseromsdiskursen er det siste aspektet ved et klasseroms læringsmiljø. Det omhandler hvordan læreren og elevene kommuniserer matematikk (Cobb, 2000; Wæge, 2007). Hvilke sosiale og sosiomatematiske normer som preger klassen er i følge Cobb en sentral del av klasseromsdiskursen.

3. Metode

For å undersøke hva som kjennetegner kommunikasjonen mellom læreren og elevene i en klasse som arbeider innenfor en undersøkende matematikkundervisning, og i en klasse som arbeider innenfor en tradisjonell matematikkundervisning, gjennomførte jeg en kvalitativ studie. Kvalitative studier handler i følge Mertens (2005) om å studere mennesker i sine naturlige omgivelser. I kapittelet vil jeg først begrunne valg av metode. Deretter vil jeg beskrive og begrunne utvalget studien er basert på. Videre presenterer jeg observasjon med lyd- og bildeopptak som metode. Jeg beskriver også hvordan datainnsamlingen ble gjennomført. Til sist i kapittelet redegjør jeg for hvordan datamaterialet har blitt analysert og hvilke etiske problemstillinger jeg har tatt hensyn til i arbeidet med studien.

3.1 Valg av metode

Valg av metode begrunner jeg ut fra tre forhold: min vitenskapsteoretiske posisjon, problemstillingen i studien og ulike praktiske forhold (Mertens, 2005). Studien min er basert på tanken om at individet aktivt konstruerer sin egen kunnskap innenfor sosiale omgivelser. Som tidligere nevnt vil jeg derfor plassere meg innenfor *det konstruktivistiske paradigmet*. Et av de viktigste prinsippene innenfor paradigmet er i følge Mertens (2005) nettopp at virkeligheten er sosialt konstruert og i stadig endring og utvikling. Det eksisterer ingen objektiv virkelighet. Målet til forskere er derfor å forstå de multiple sosiale konstruksjonene av mening og kunnskap. Forfatteren mener at innenfor det konstruktivistiske paradigmet er det hensiktsmessig å gjennomføre kvalitative studier. Metodene intervju, observasjon og dokumentgjennomgang er dominerende.

Problemstillingen min er også avgjørende for valg av metode. Jeg ønsker å studere kommunikasjon mellom lærer og elever i to klasser: En som arbeider innenfor en undersøkende matematikkundervisning og en som arbeider innenfor en tradisjonell matematikkundervisning. Bauersfeld (1980) beskriver som tidligere nevnt (se delkapittel 2.2.1) det han kaller *skjulte dimensjoner* i matematikklasserommet: Summen av situasjoner, regler, forventninger, tolkninger og subjektive realiteter. Som en forutsetning for kommunikasjon mellom lærer og elever vil deltakerne måtte ha en felles forståelse som de tar som et implisitt referansegrunnlag når de snakker til hverandre. Kommunikasjonen går ofte ubevisst inn i visse spor, som til og med kan stride mot lærerens hensikt (Voigt, 1994; Bauersfeld, 1988). Jeg har av den grunn valgt å bruke observasjon kombinert med lyd- og bildeopptak som metode. Min vurdering er at det ville være vanskelig å få informasjon om kommunikasjonen mellom lærer og elever uten å studere det direkte gjennom observasjon. Robson (2002) mener at en stor fordel med observasjon som metode er nettopp at den er så direkte. Gjennom observasjon blir ikke mennesker spurt om sine forestillinger, følelser eller holdninger; observatøren ser hva de gjør og lytter til hva de sier.

Enkelte praktiske forhold er også avgjørende for valg av metode. Mertens (2005) mener at innenfor det konstruktivistiske paradigmet kan det være hensiktsmessig å kombinere ulike metoder for å få flere perspektiv. I oppstarten av arbeidet med masterstudien vurderte jeg å ha et oppfølgningsintervju med hver lærer i tillegg til observasjon med lyd- og bildeopptak. Siden det ville være et tidkrevende arbeid å transkribere og analysere videomaterialet, kom jeg i samråd med veileder frem til at jeg ikke skulle gjennomføre intervju i tillegg.

3.2 Utvalg

Utvalget i masterstudien er foretatt på bakgrunn av et hovedkriterium: Undervisningen som gjennomføres i klassen. Målet med studien er å finne hva som kjennetegner kommunikasjonen mellom læreren og elevene i en klasse som arbeider innenfor en undersøkende matematikkundervisning, og i en klasse som arbeider innenfor en tradisjonell matematikkundervisning. Jeg ønsket derfor at utvalget i studien skulle bestå av to klasser. Den ene skulle arbeide på en undersøkende måte med matematikk; den andre på en tradisjonell måte. Et annet, sekundært kriterium var målgruppa. Lektorutdanning i realfag (Master, 5-årig) er først og fremst rettet mot å utdanne lærere som skal undervise i videregående skole. Siden jeg selv ønsker å arbeide med denne aldersgruppa, var det derfor naturlig for meg å velge klasser fra videregående skole.

Utvalget består dermed av to klasser fra to ulike videregående skoler: Kirkegata videregående skole og Storåsen videregående skole[2]. Den ene klassen ble valgt etter anbefaling fra veilederen min. En av lærerne ved Kirkegata videregående skole gjennomfører en undersøkende matematikkundervisning, og veilederen min forslo at jeg skulle kontakte henne. Jeg tok kontakt med læreren og kunne velge hvilken klasse jeg ville besøke: 1T, R1 eller R2. 1T er et 5-timers teoretisk matematikkfag som tas i VG1, første året på videregående skole. R1 og R2 er 5-timers realfagsmatematikk som tilbys som valgfrie programfag i henholdsvis i

[2] Navnene er fiktive.

VG2 og VG3. R1- og R2-klassene består av få elever, begge færre enn 10. Jeg ønsket i utgangspunktet ikke å besøke klasser som består av så få elever, da størrelsen ikke er representativ for de fleste matematikkklasser. Valget falt derfor på 1T, som består av 16 elever. Den andre klassen i utvalget er fra en videregående skole som jeg hadde kjennskap til fra tidligere. Min egen erfaring tilsier at matematikkundervisningen ved skolen i stor grad følger et tradisjonelt mønster. Jeg tok kontakt med Storåsen videregående skole gjennom avdelingslederen for realfag. Jeg ba om å bli henvist til en lærer som underviser i 1T og som kunne tenke seg å få besøk i klassen sin. Siden jeg hadde valgt nivået 1T ved Kirkegata vgs, var det naturlig å velge samme nivå ved Storåsen vgs. Avdelingslederen satte meg i kontakt med en lærer som underviser i 1T, så jeg kjente ikke til læreren på forhånd. Ut fra egen erfaring vet jeg derimot at lærerne i 1T ved skolen i stor grad følger samme tempoplan, som er gitt ut fra delkapitler i læreverket. Jeg var derfor ganske sikker på at matematikkundervisningen i klassen kom til å være oppgave-og lærebokstyrt, altså tradisjonell. Klassen jeg besøkte består av 22 elever, som er en tilsvarende gruppestørrelse som ved Kirkegata vgs.

3.3 Observasjon med og uten lyd-og bildeopptak

3.3.1 Observasjon som metode

Observasjon som metode handler om å studere menneskers handlinger og oppførsel og registrere det på en eller annen måte. Videre kan forskeren beskrive, analysere og tolke det som har blitt observert. Observasjon er en av vanligste metodene innenfor kvalitativ forskning (Robsen, 2002; Mertens, 2005). Metoden er attraktiv siden den gir forskeren mulighet til å samle ”live” eller direkte data fra ”live” situasjoner (Cohen, Manion & Morrison, 2000).

Adler og Adler (1994, i Mertens 2005) skiller mellom observasjon og deltakende observasjon. Jeg vil karakterisere min rolle som *perifer-medlem-observatør*. Det innebærer at jeg observerte og samhandlet nært nok med deltakerne for å få et innsideperspektiv, men uten at jeg deltok i gruppens aktiviteter (Mertens, 2005). I studien min ønsker jeg å studere hva som kjennetegner kommunikasjonen mellom læreren og elevene i hver av de to klassene, i en helt vanlig time. Jeg forsøkte derfor å legge til rette for at undervisningssituasjonen skulle bli så normal som mulig. Å være perifer-medlem-observatør ga meg mulighet til å være til stede i klassen og samle inn data. Samtidig holdt jeg meg i bakgrunnen slik at jeg skulle få et mest mulig reelt bilde av hvordan kommunikasjonen mellom læreren og elevene normalt pleier å være. I delkapittel 3.3.3 vil jeg beskrive i mer detalj hvordan observasjonen ble gjennomført.

Observasjonen jeg gjorde vil jeg karakterisere som *semistrukturert (*Robson, 2002). Jeg så etter hva som kjennetegner kommunikasjonen mellom læreren og elevene i hver klasse. På forhånd hadde jeg laget et observasjonsskjema, der jeg underveis noterte ned hva jeg mente var typiske kjennetegn og hvilke kommunikasjonsmønstre samtalene så ut til å følge. Fordi jeg samtidig gjorde videoopptak og passet på å få gode opptak av læreren sammen med elevene, ble observasjonsnotatene lite fullstendige. De danner mer ”knagger” å henge data fra lyd- og bildeopptakene på. Hvordan observasjonsnotatene ble brukt går jeg mer i dybden på i delkapittel 3.3.4.

3.3.2 Observasjon kombinert med lyd- og bildeopptak

Hoveddelen av datamaterialet i studien min består av lyd-og bildeopptak. Det er vanlig å bruke tekniske hjelpemidler som båndopptaker eller video under observasjon (Thagaard, 2002). Men når tekniske hjelpemidler brukes, må det vurderes opp mot hvilken virkning det kan ha på informantene. Thagaard (2002) mener at å bringe videokamera eller båndopptaker inn i klasserommet kan virke forstyrrende på informantene. Selv om bruk av videokamera kan virke forstyrrende, mener jeg at bruken var nødvendig i forhold til å kunne svare på problemstillingen min. Gjennom observasjon alene, ville det vært umulig for meg å fange opp nøyaktig hva og hvordan læreren og elevene kommuniserte med hverandre til enhver tid. Et alternativ til å bruke videokamera er å kun bruke båndopptaker, noe som kan virke mindre forstyrrende (Thagaard, 2002). Jeg hadde ikke anledning til å gjennomføre en pilotstudie i forkant av masterstudien, så jeg har ikke sjekket hvordan opptak med kun båndopptaker ville fungert. Min vurdering var at jeg også ville ha behov for bildeopptak for å få et bedre innsyn i hva læreren og elevene kommuniserer om og hvordan de snakker til hverandre (tekst på tavla, oppgaver, tekst på PC-skjerm, hvordan deltakerne uttrykker mening gjennom ansiktsuttrykk og mimikk).

Det er flere fordeler og ulemper med å bruke observasjon kombinert med lyd- og bildeopptak som metode. En fordel er, som tidligere nevnt, at metoden er svært direkte. Den gir informasjon om hva som faktisk foregår i den aktuelle situasjonen. Jeg studerer direkte hva som blir sagt og gjort, uten å spørre deltakerne i klasserommet om hva de tror og mener (Robson, 2002; Mertens, 2005). Slik får jeg et ganske nøyaktig bilde av hva som kjennetegner kommunikasjonen mellom læreren og elevene. Lyd- og bildeopptak gir meg også mulighet til å få studere samtaler mellom læreren og elevene i ettertid og få gjort nøyaktige nedskrivinger av hva som ble sagt. En annen fordel med å bruke lyd- og bildeopptak, er at de kan være med på å unngå min subjektive vinkling på enkelte situasjoner som kan oppstå i matematikklasserommet. Ved å gjøre opptak med videokamera blir datainnsamlingen og analysen mer fullstendig, der resultat og analyse ikke vil være like avhengig av mitt fokus og eventuelle meninger jeg gjør meg opp gjennom observasjon (Cohen, Manion & Morrison, 2000). Å kombinere observasjon med lyd- og bildeopptak gir mulighet for *triangulering*, noe som innebærer å se på den aktuelle situasjonen fra flere synsvinkler (Mertens, 2005).

En ulempe ved bruk av observasjon kombinert med lyd- og bildeopptak, er at det er en viss fare for at jeg som observatør påvirker situasjonen og deltakerne. Jeg er et uvant element i klassen, og ingen av lærerne hadde fra før stor erfaring med å bli filmet og gå med mikrofon. Dermed kan jeg ikke være sikker på at informasjonen jeg samlet inn hadde vært den samme om jeg ikke var til stede i klasserommet (Robson, 2002; Mertens, 2005). Å bruke videokamera kan som tidligere nevnt virke ekstra forstyrrende på deltakerne (Thagaard, 2002). Jeg forsøkte å kompensere for dette ved å være en perifer-medlem-observatør og holde meg mest mulig i bakgrunnen. Slik prøvde jeg å legge til rette for at deltakerne lettere kunne glemme at jeg var til stede. Thagaard (2002) påpeker også at informanter som er intenst opptatt med samtaler eller aktiviteter vil kunne glemme at det gjøres opptak.

3.3.3 Gjennomføring

I samråd med veileder bestemte jeg meg for å være til stede fire undervisningstimer (4 x 45 min) i hver av de to klassene. Selv om det kan være vanskelig å få et fullstendig bilde av kommunikasjonen mellom lærer og elever i løpet av så kort tid, støtter jeg meg på Voigt (1994). Han mener at kommunikasjonsmønstre er svært stabile. Som nevnt flere ganger tidligere vil læreren og elevene i en klasse kommunisere med hverandre ut fra de regler og forventninger de allerede har til hverandre (Bauersfeld, 1980; Bauersfeld, 1988; Voigt, 1994; Voigt, 1995). Et tradisjonelt mønster som IRE/IRF kan for eksempel være så stabilt at det kan oppstå forvirring dersom en av partene forsøker å bryte det (Lemke, 1990). Sporet kommunikasjonen går inn i endres dermed ikke så lett. Min vurdering er derfor at fire undervisningstimer i hver klasse gir meg et godt innsyn i hvordan kommunikasjonen mellom lærer og elever normalt pleier å foregå. En annen begrunnelse for ikke å være til stede i hver klasse i mer enn fire undervisningstimer, er praktiske hensyn. Det ville blitt for mye arbeid med å transkribere og bearbeide datamaterialet om det var større.

Datamaterialet ble innsamlet over to perioder, én periode i hver klasse. Først besøkte jeg Kirkegata vgs. Matematikkundervisningen i klassen er lagt opp slik at elevene har to dobbelttimer og en enkelttime pr uke. Jeg var til stede i begge dobbelttimene den uka jeg besøkte skolen. Hver undervisningsøkt ble videofilmet, med litt ulik bruk av videokamera. Den første dagen var kameraet plassert på stativ. Min vurdering var at da ville både læreren og elevene lettere kunne glemme at jeg var til stede, slik at undervisningssituasjonen skulle bli så normal som mulig. Siden fokuset mitt er på lærerens kommunikasjon med elevene, var videokamerat hele tiden rettet mot læreren. Hun brukte mikrofon som var koblet til kamerat i hver undervisningsøkt, slik at jeg alltid kunne høre hva som ble diskutert mellom henne og elevene. Da jeg etter første dagen så gjennom videomaterialet, merket jeg at jeg savnet nærbilder av læreren sammen med hver enkelt elev/elevgruppe. Årsaken til det var at elevene brukte PC aktivt mens de arbeidet med matematikkoppgavene. Mens læreren diskuterte med elevene, pekte de ofte og snakket om noe som sto på PC-skjermen. Det var i enkelte tilfeller vanskelig for meg å skjønne hva de snakket om. I neste dobbelttime gikk jeg derfor rundt med videokameraet i stedet for å plassere det på stativ. Det var god plass i klasserommet, og jeg kunne derfor gå fritt rundt uten å forstyrre læreren eller elevene. Ingen så ut til å bry seg om verken meg eller kameraet, og jeg holdt en passende avstand til de andre deltakerne.

Et par uker senere besøkte jeg Storåsen vgs. Matematikkunderundervisningen ved skolen er organisert på samme måte som ved Kirkegata vgs. Igjen var jeg til stede og videofilmet i to etterfølgende dobbelttimer.[3] Jeg valgte å la kamerat stå på stativ bakerst i klasserommet i begge undervisningsøktene. Den ene årsaken til det er at det var ganske dårlig plass i klasserommet og lite rom til å gå mellom pultene. Læreren hadde også på forhånd uttrykt en viss nervøsitet for å bli filmet og gå med mikrofon. Ved å la kamerat stå på stativ forsøkte jeg både å gjøre situasjonen minst mulig stressende for læreren, og å la undervisningen bli så normal som mulig. Etter den første dobbelttimen så jeg gjennom datamaterialet. Min vurdering var at kvaliteten på bilde og lyd var god nok, slik at det ikke var nødvendig med nærbilder.

[3] Klassen hadde en enkelttime mellom de to dobbelttimene.

3.3.4 Analyse og analyseverktøy

Etter datainnsamlingen så jeg gjennom observasjonsnotatene mine. De ble videre brukt som ”knagger” eller som et utgangspunkt for å finne typiske kjennetegn på kommunikasjonen mellom læreren og elevene i hver klasse. En annen masterstudent gjennomførte sin undersøkelse i samme klasser og på samme tidspunkt som meg. Jeg hadde derfor mulighet til å diskutere mine observasjoner med henne. Å diskutere observasjonen med en annen observatør kaller Mertens (2005) for *kryssjekking.* I følge Mertens vil kryssjekking styrke gyldigheten og påliteligheten i en studie.

Videre ble datamaterialet fra lyd- og bildeopptakene transkribert. I transkripsjonen ble all form for kommunikasjon skrevet ned. I tillegg til det som faktisk ble sagt, ble også handlinger og ansiktsuttrykk eller kroppsspråk notert der det ble ansett som hensiktsmessig. Pauser i samtalen ble markert med ”pause”. Ikke-verbel aktivitet ble skrevet i parentes. Arbeidet med å transkribere datamaterialet ble foretatt like etter at datainnsamlingen var avsluttet i hver klasse. Dermed var også alle observasjoner og inntrykk fortsatt ferske i minnet.

Observasjonsnotatene og den transkriberte teksten ble først brukt til å gi en kort beskrivelse av undervisningen i klassen. I beskrivelsen fokuserte jeg på fire aspekter ved læringsomgivelsene i klassen, som presentert i delkapittel 2.6. Hensikten var å gi et overordnet bilde av hvordan læreren i hver klasse kommuniserte med elevene sine og hva som kjennetegner undervisningen. Videre leste jeg gjennom den transkriberte teksten og markerte dialoger mellom lærer og elever i hver klasse som var typiske for hvordan de kommuniserte med hverandre. Samtaler som omhandlet ikke-matematiske temaer (som praktisk bruk av GeoGebra, tekniske problemer med PC, informasjon om prøver/lekser osv), valgte jeg å se bort fra. Dialogene ble analysert opp mot de ulike kommunikasjonsmønstrene presentert i delkapittel 2.3, 2.4 og 2.5. Jeg så på hvilke mønstre kommunikasjonen mellom læreren og elevene følger i ulike situasjoner.

3.4 Etiske betraktninger

Det er viktig å ta hensyn til etiske problemstillinger gjennom hele arbeidsprosessen, både under observasjon med lyd- og bildeopptak og ved transkribering og analyse (Thagaard, 2002). Jeg vil nå kort beskrive hvilke etiske hensyn jeg foretok i arbeidet med studien.

I følge Forskningsetiske Komiteer (2006) skal de som er gjenstand for forskning få all informasjon som er nødvendig for å danne seg en rimelig forståelse av forskningsfeltet. De bør kjenne til følgene av å delta i forskningsprosjektet og hensikten med forskningen. Informasjon om studien skal gis på en nøytral måte, og det er viktig å informere om det er frivillig å delta. Jeg la derfor stor vekt på *informert samtykke* (Kvale & Brinkmann, 2009). Elevene fikk utdelt et informasjonsbrev[4] der formålet med studien og hovedtrekkene i forskningsdesignet var beskrevet. Som en del av informasjonsskrivet var en samtykkeerklæring. Siden elevene er under myndighetsalder, ba jeg om at både foreldre/foresatte og eleven selv skulle signere på godkjenningsskjemaet. Forskningsetiske Komiteer (2006) understreker at selv i tilfeller der en person ikke er myndig, er det svært viktig at barnet selv også gir sitt samtykke. Informasjonsbrevet ble skrevet i samarbeid med Hild Mari Kvikne, en annen masterstudent. Vi samarbeidet i datainnsamlingsfasen.

Datamaterialet fra observasjon med lyd- og bildeopptak ble videre behandlet med konfidensialitet. Det innebærer å beskytte lærerens og elevenes privatliv (Forskningsetiske Komiteer, 2006; Mertens, 2005). Datamaterialet ble anonymisert, slik at ingen kan assosiere det med de aktuelle personene involvert. Jeg navngir verken elevene eller læreren (de er gitt fiktive navn). Skolenes navn er også fiktive.

[4] Informasjonsbrevet med samtykkeerklæring er gitt som vedlegg 1. Merk at skolenes navn er endret til de fiktive navnene og at datoene heller ikke oppgis.

4. Beskrivelse av matematikkundervisningen i de to klassene

I det følgende gir jeg en beskrivelse av matematikkundervisningen i begge klassene. Jeg fokuserer på fire aspekter ved læringsomgivelsene i klassen, som beskrevet i delkapittel 2.6. Hensikten med å gi en slik beskrivelse er å gi et overordnet bilde av hva læreren og elevene kommuniserer om og hvordan de snakker med hverandre. I kapittel 5 går jeg deretter i dybden på hva som kjennetegner kommunikasjonen mellom læreren og elevene i hver klasse.

4.1. Beskrivelse av matematikkundervisningen ved Kirkegata vgs

Min beskrivelse av matematikkundervisningen i klassen fra Kirkegata vgs er basert på de to undervisningsøktene jeg observerte. Først beskriver jeg kort hva som skjedde i løpet av øktene. I beskrivelsen berører jeg de fire aspektene ved læringsomgivelsene i klasserommet. Deretter oppsummerer jeg ved å fokusere spesielt på Cobbs (2000) fire aspekter.

4.1.1 Observasjon av undervisningen

Den første undervisningsøkten starter med at læreren forteller at dagens tema er funksjoner, vekstfart og gjennomsnittlig vekstfart; det samme som forrige gang. Læreren og elevene arbeider deretter med oppgave 7.30 fra Sinus 1T (Oldervoll, Orskaug, Vaaje, Hanisch & Hals, 2009) i fellesskap. Oppgaven gjengis her:

> *Høyden av ei gran målt i meter t år etter at den ble plantet, er*
>
> $$h(t) = -0{,}0003t^3 + 0{,}025t^2,\ \ t \in [0{,}50]$$
>
> *Finn den gjennomsnittlige vekstfarten til grana i periodene [0,10], [10,20], [20,30], [30,40] og [40,50].*

Elevene er plassert i par, og alle elevene har sin individuelle datamaskin med programmet GeoGebra[5]. Læreren benytter også egen datamaskin med GeoGebra i undervisningen. Den er koblet opp mot videokanon, slik at elevene kan se hva læreren gjør. Funksjonen *h* tegnes i programmet. I fellesskap blir det satt navn på aksene og ordnet med praktiske innstillinger (antall desimaler, fontstørrelse, rutenett/ikke rutenett osv). Videre blir den gjennomsnittlige vekstfarten funnet i intervallet [0,50]. Begrepet momentan veksthastighet blir også introdusert, og læreren viser hvordan elevene kan finne stigningstallet til tangenten i ett punkt

[5] GeoGebra er et dynamisk matematikkprogram.

ved bruk av GeoGebra. Læreren leder gjennomgangen, men hun inkluderer elevene ved å stille både åpne spørsmål som oppmuntrer dem til å være aktive deltakere i diskusjonen samt flere presise spørsmål. Elevene stiller ofte også egne spørsmål, som enten omhandler praktisk bruk av GeoGebra eller som er direkte relatert til det matematiske temaet.

Elevene arbeider deretter to eller tre sammen med oppgaver fra et kompendium[6] laget av læreren. Det er i hovedsak to typer oppgaver. Den første oppgavetypen handler om å finne tangentens stigningstall i flere punkter for en funksjon og beskrive systemet. Et eksempel på en slik oppgave er presentert nedenfor[7]:

> *Tegn grafen til $h(x) = x^2$ i GeoGebra*
>
> *Tegn tangenter i flere punkter, for eksempel i $x = 1$, $x = 2$, $x = 0$, $x = -1$, og noter opplysningene i et skjema:*

h(x) = x^2		
Tangent i punktet	***Tangentens stigningstall***	***Systemet er ..***
x = 1		
x = 2		
x = 0		
x = -1		

> *Kan du gjette hva stigningstallet vil bli for tangenten i andre x-verdier, x = -2, x = 3, osv. ? Skriv det du gjetter i tabellen, og kontroller etterpå ved å tegne*

Den andre oppgavetypen elevene arbeider med handler om å finne tangentens stigningstall i flere punkter for en funksjon og sammenligne resultatene med en annen funksjon. Et eksempel er gitt nedenfor:

---

[6] Hele kompendiet er gitt som vedlegg 2.

[7] Alle oppgavene jeg presenterer i delkapittelet er valgt fordi læreren og elevene snakker om dem i dialogene jeg presenterer i delkapittel 5.1. Slik blir det lettere for leseren å følge hva deltakerne i klassen snakker om.

Oppgave: Å finne momentan veksthastighet = stigningstall til tangenter til grafer (forts.)

b(x) = x^2 *+ x*			*Sammenlign med d(x) =* x^2 *(fra forrige time)*	
Tangent i punktet	*Tangentens stigningstall*	*System*	*Tangentens stigningstall*	*System*
x = 1				
x = 2				
x = 0				
x = -1				

To ganger i løpet av undervisningsøkten stopper læreren elevene i arbeidet med oppgavene for å ha en felles oppsummering. Hun ber elevene om å fortelle hvilket system de har observert at tangentens stigningstall følger for de ulike funksjonene. Selv om én elev forklarer hvordan han har beskrevet systemet, ber læreren også andre elever om å fortelle hva de har skrevet. Hun søker altså etter mer enn bare én mulig formulering av hvert system.

Den andre undervisningsøkten starter med at læreren og elevene fortsetter å arbeide med oppgave 7.30 i fellesskap. De skriver inn i GeoGebra resultatene fra forrige time: Hva den gjennomsnittlige vekstfarten var for de første femti årene, og hva den momentane vekstfarten var for x = 20 år. Videre introduserer læreren begrepet derivasjon og knytter det til momentan vekstfart. Hun lager følgende tabell på tavla som hun fyller ut sammen med elevene:

Tabell 1: Tabell læreren skriver på tavla

Funksjon	Momentan vekstfart i et punkt = tangentens stigningstall i punktet	Den deriverte til funksjonen i et punkt
$h(x) = x^2$	*x*-verdien ganges med 2, *2x*	$h'(x) = 2x$

$k(x) = - x^2$	x-verdien ganges med -2, $-2x$	$k'(x) =- 2x$
$g(x) = x^2 + 3$	x-verdien ganges med 2, $2x$	$g'(x) = 2x$
$f(x) = 2x^2$	ganger $2x$ med 2	$f'(x) = 2x \cdot 2 = 4x$
....	....	....
....	....	....
....	....	....

Læreren inkluderer elevene ved å stille spørsmål om hvilket system de observerte at tangentens stigningstall fulgte for de ulike funksjonene, og hvordan de kan skrive det ved å bruke den nye skrivemåten (den deriverte til funksjonen i et punkt).

Elevene arbeider deretter videre med oppgaver fra kompendiet. Mot slutten av undervisningsøkten har klassen nok en felles oppsummering, der funksjonene elevene har arbeidet med i timen blir satt inn i tabell 1.

4.1.2 Oppsummering

Klasseromsaktivitetene er strukturert slik at læreren innleder timen med å repetere emnet klassen arbeidet med forrige gang, samt at hun introduserer nye begreper. Samtalene mellom læreren og elevene følger en blanding av en stram og løs struktur. Læreren har gjerne en viss styring på kommunikasjonen, men elevene stiller ofte også egne spørsmål. Elevene arbeider deretter to eller tre sammen med matematikkoppgaver. Hver undervisningsøkt avsluttes av en felles oppsummering, der læreren ber elevene presentere sine løsninger på oppgavene. Undervisningen følger en tredelt struktur, bestående av introduksjon til nytt tema, arbeid med oppgaver og oppsummering.

Elevene arbeider med oppgaver som læreren har utviklet selv og som er samlet i et kompendium. Den eneste oppgaven fra læreboka som elevene arbeider med er 7.30, som diskuteres i fellesskap. Oppgavene legger opp til at elevene skal finne tangentens stigningstall i flere punkter for ulike funksjoner og beskrive hvilket system de ser. I tillegg ser de etter sammenhenger mellom systemer for funksjoner, slik som å sammenligne systemene for $d(x) = x^2$ og $b(x) = x^2 + x$.

Verktøyet elevene bruker er GeoGebra. Programmet anvendes først og fremst til å tegne tangenter i ulike punkt og til å finne stigningstallet til hver tangent.

Sosiale normer som preger klassen er for det første en felles forventning om at elevene skal forsøke å se sammenhenger i matematikk, og at de skal lete etter mønster og systemer. Elevene arbeider alltid minst to sammen, og min vurdering er at det eksisterer en forventning i klassen om at elevene skal samarbeide og diskutere ulike forslag og løsninger. Læreren ber ofte om mer enn kun ett forslag til hvordan et system kan formuleres. En sosiomatematisk norm som ser ut til å eksistere i klassen er dermed at det er mer enn bare én riktig løsning på oppgavene.

Matematikkundervisningen legger opp til at elevene selv skal være aktive og utforskende. Det fokuseres på å lete etter mønster og systemer, se sammenhenger i matematikk og matematisk resonnement. Mine observasjoner bekrefter derfor at matematikkundervisningen er en undersøkende matematikkundervisning slik det er definert av Wæge (2007).

4.2 Beskrivelse av matematikkundervisningen ved Storåsen vgs

Min beskrivelse av matematikkundervisningen i klassen fra Storåsen vgs er basert på de to undervisningsøktene jeg observerte. Som i forrige delkapittel beskriver jeg først kort hva som skjedde i løpet av øktene. Deretter oppsummerer jeg ved å fokusere spesielt på de fire aspektene ved læringsomgivelsene i klasserommet.

4.2.1 Observasjon av undervisningen

Den første undervisningsøkten innleder læreren med en sekvens fra tavla. Hun forteller at dagens tema er sannsynlighet, nærmere bestemt delkapittel *9.3: Hendinger*[8]. Videre arbeider læreren og elevene med to oppgaver i fellesskap som begge omhandler sannsynligheten for å trekke gitte kort ut fra en kortstokk. Læreren presenterer deretter to regler som elevene kan bruke for å finne sannsynligheten for en hendelse. Sekvensen avsluttes av at læreren gjennomgår en oppgave der hun bruker reglene. Læreren leder hele gjennomgangen, og hun inkluderer elevene ved å stille presise spørsmål knyttet til hvordan de ulike oppgavene skal løses. Elevene stiller få egne spørsmål.

[8] Klassen bruker læreverket Sinus 1T.

Elevene arbeider deretter parvis eller alene med oppgaver fra læreboka innenfor temaet sannsynlighet. De som blir raskt ferdige, jobber med del 1 av en tidligere gitt årsprøve.[9] Læreren sier flere ganger at det er viktig at elevene gjør mange oppgaver. Hun minner dem også på at det snart er heldagsprøve og at det er lurt å arbeide med årsprøven. Det er ingen felles oppsummering på slutten av økten; elevene arbeider med oppgaver frem til timen blir avsluttet av det er friminutt.

Nedenfor vises eksempler på oppgaver fra læreboka[10]:

Oppgave 9.31

I en kurv ligger det noen sjokoladebiter som alle er pakket inn i samme type papir. Sjokoladene er av typene 1, 2, 3 og 4. Sonja trekker tilfeldig én bit og vet av erfaring at P(type 1) = 0,3, P(type 2) = 0,2 og P(type 3) = 0,4. Hun liker bare type 2 og 4. Vi definerer hendingen

A: Sonja trekker en bit som hun liker

Finn P(A).

Oppgave 9.34

Vi kaster en terning to ganger (eller to terninger én gang).

a) *Finn ved regning hvor mange utfall vi har.*
b) *Skriv opp utfallene.*
c) *Finn sannsynligheten for å få minst én sekser.*
d) *Finn sannsynligheten for at summen av øynene skal bli 7.*

Eksempler på oppgaver fra årsprøven:

Oppgave 1

b) Regn ut

1) $\frac{(2x)^2 \cdot (x^2)^{-3}}{4 \cdot x^{-3}}$

[9] Et utvalg av oppgavene fra læreboka er gitt som vedlegg 3. Del 1 av årsprøven er gitt som vedlegg 4.
[10] Alle oppgavene jeg velger å presentere her blir diskutert mellom læreren og elevene i dialogene jeg presenterer i delkapittel 5.2.

I den neste undervisningsøkten starter læreren med å skrive opp følgende regel på tavla: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Regelen er kjent for elevene, da den ble introdusert dagen før.[11] Hun presenterer så en oppgave som hun løser sammen med elevene. Oppgaven omhandler familien Berg som skal på hytta og som kan velge mellom to fjelloverganger; A eller B. Læreren oppgir sannsynligheten for at fjellovergang A er åpen, for at B er åpen og for at begge er åpne. Oppgaven er å finne sannsynligheten for at A eller B er åpne. Etter at gjennomgangen er over, arbeider elevene med oppgaver fra delkapittel 9.4 og videre på årsprøven. Senere i undervisningsøkten har læreren en ny sekvens fra tavla. Hun gjennomgår da delkapittel *9.5: Betinget sannsynlighet*. Læreren lager følgende tabell på tavla:

Tabell 2: Tabell fylt ut av læreren og elevene

	Jenter	Gutter	Sum
Elever som går på treningsstudio	8	4	12
Elever som ikke går på treningsstudio	8	10	18
Sum	16	14	30

Læreren fyller selv ut hvor mange gutter og jenter som går eller ikke går på treningsstudio. Elevene bidrar så, på oppfordring fra læreren, med å fylle ut raden og kolonnen for sum. Med utgangspunkt i tabell 2 arbeider klassen med å finne sannsynligheten i flere ulike tilfeller, f.eks. sannsynligheten for at en elev er jente gitt at eleven går på treningsstudio. Igjen er det læreren som leder gjennomgangen, men hun stiller elevene spørsmål knyttet til hvordan de skal gå frem for å løse oppgavene. Videre i undervisningsøkten arbeider elevene med oppgavene fra delkapittelet, samt med oppgaver fra årsprøven. Det er ingen egen oppsummeringsdel på slutten av timen.

4.2.2 Oppsummering

Klasseromsaktivitetene er strukturert slik at læreren først gjennomgår nytt stoff på tavla. I gjennomgangen presenterer læreren nye begreper og regler, i tillegg til at hun går gjennom eksempler eller oppgaver sammen med elevene. Læreren har en klar styring på retningen på

[11] Jeg var ikke til stede i den timen, men læreren sa hva som var temaet.

samtalene. Elevene svarer på lærerens presise spørsmål, men stiller få spørsmål selv. Etter gjennomgangen arbeider elevene med oppgaver fra læreboka, enten parvis eller alene.

Oppgavene elevene arbeider med er i hovedsak hentet fra læreboka. I tillegg arbeider elevene med del 1 av en tidligere gitt årsprøve.

Verktøyet elevene hovedsakelig bruker er vanlig kalkulator. Elevene benytter kalkulatoren til å utføre beregninger, spesielt for å finne forkortet brøk eller desimaltall i sannsynlighetsoppgaver.

Sosiale normer som ser ut til å prege klassen, er en felles forventning om at elevene skal gjøre mange oppgaver hentet fra læreboka og årsprøven. Lærerens rolle består i å presentere teori og vise eksempler og fremgangsmåter. I gjennomgangene sine har læreren et klart fokus på hvordan elevene skal løse oppgavene og hvilke regler de skal bruke. En sosiomatematisk norm som ser ut til å eksistere i klassen, er dermed at det stort sett er kun én måte å komme frem til svaret på en oppgave.

I matematikkundervisningen er det et klart fokus på oppgaveløsning. Strukturen til klasseromsaktivitetene følger også den tradisjonelle strukturen. Mine observasjoner bekrefter derfor at undervisningen er en tradisjonell matematikkundervisning, slik det defineres av Alrø og Skovsmose (2002).

5. Analyse av data

I kapittel 4 har jeg beskrevet matematikkundervisningen ved Kirkegata vgs og Storåsen vgs ved å fokusere på fire aspekter ved læringsomgivelsene i klasserommet. Slik har jeg gitt en situasjonsbeskrivelse for kommunikasjonen mellom deltakerne i klassen. I det følgende går jeg i dybden på hva som kjennetegner kommunikasjonen mellom læreren og elevene i hver klasse. Jeg presenterer dialoger som er typiske for hvordan de snakker med hverandre, og analyserer disse ved hjelp av analyseverktøyet beskrevet i delkapittel 3.3.4.

Et naturlig skille går mellom om læreren kommuniserer med hele klassen eller kun med enkeltelever eller mindre grupper av elever. Jeg presenterer derfor først kjennetegn på kommunikasjonen i helklassen, før jeg går inn på hvordan læreren kommuniserer med enkeltelever/mindre elevgrupper. Kapittelet er bygd opp slik at jeg først presenterer analyse av data fra Kirkegata vgs, deretter fra Storåsen vgs.

5.1 Analyse av data fra Kirkegata videregående skole

For å belyse kjennetegn på kommunikasjonen i helklassen, har jeg valgt å presentere fire dialoger. Jeg fant i datamaterialet at det er en viss variasjon i måten læreren kommuniserer med elevene på, og hver dialog viser ett eller flere typiske kjennetegn. Derimot er det liten variasjon i måten læreren kommuniserer på med enkeltelever eller mindre elevgrupper. Alle samtalene følger det samme kommunikasjonsmønsteret, men hvilke elementer fra mønsteret som er til stede varierer noe. Fire dialoger er valgt ut for å illustrere kjennetegn på kommunikasjonen mellom lærer og enkeltelever/mindre elevgrupper.

5.1.1 Kommunikasjon i helklassen

Som beskrevet i delkapittel 4.1, kommuniserer læreren med helklassen i to ulike deler av timen. Hver undervisningsøkt starter med felles repetisjon og en introduksjon til nye begreper. Mot slutten av hver økt har klassen en oppsummering der læreren ber elevene fortelle hvordan de har løst oppgavene.

Et kjennetegn ved kommunikasjonen i introduksjonsdelen, er at læreren i flere tilfeller har en klar styring på retningen på samtalen, slik følgende situasjon viser:

Situasjon 1:

K.1	Lærer:	Og så får vi en kurve som ser omtrent sånn ut. Men det står noe om definisjonsområdet? Hva er definisjonsområdet? Monica?
K.2	Monica:	Innenfor det området der det skal være.
K.3	Lærer:	Ja, og hvilket område skal det være innenfor?
K.4	Monica:	(pause, ser ned) Null og femti.
K.5	Lærer:	Ja, er det x-aksen eller y-aksen det dreier seg om?
K.6	Flere elever:	X.

Læreren stiller først et spørsmål som oppmuntrer til elevsvar. Hun peker ut Monica til å svare. Monica gir respons på spørsmålet, og læreren følger opp med et nytt spørsmål (linje K.1 til K.3). Her er det min vurdering at læreren kommuniserer med elevene gjennom IRE/IRF-mønsteret beskrevet av Wells (1999) og Cazden (2001). Kommentarene til læreren (linje K.3 og K.5) er evaluerende, siden hun starter med å si ”Ja”. Slik viser hun at elevens svar er korrekt. Samtidig følger hun opp med nye spørsmål, slik at hun også gir mer generell feedback (Wells, 1999). I denne dialogen styrer læreren hele retningen på kommunikasjonen, slik som normalt skjer innenfor IRE/IRF-mønsteret. Elevene får dermed en mer passiv rolle (Lemke, 1990).

Selv om læreren i mange tilfeller stiller presise spørsmål, slik som i situasjon 1 ovenfor, er flere av spørsmålene hennes mer åpne. I samtaler der spørsmålene begynner som åpne, går læreren ofte inn i ”gjett hva læreren tenker”-mønsteret. Følgende situasjon viser det:

Situasjon 2:

K.7	Lærer:	Ja...Oppgave 7.30: Hva handler den om?
K.8	Lene:	Om den grana...Antall år siden den ble planta.
K.9	Lærer:	Ja, hva det er med den grana? (pause) Hva er det som blir registret på den?
K.10		[mumling fra flere elever]
K.11	Beate:	(virker usikker) Vekstfart...?
K.12	Lærer:	Er det vekstfarten som blir registrert? [ser på PC-skjermen, virke usikker]
K.13		[elever snakker i munnen på hverandre, Roger nevner høyde]
K.14	Lærer:	Hva sa du Roger?
K.15	Roger	Høyden til grana.
K.16	Lærer:	[nikker] Det var høyden som ble registrert.

Læreren starter med et ganske åpent spørsmål (linje K.7). Hun ber elevene fortelle hva oppgaven handler om. Videre lurer hun på hva det er med grana; hva som blir registrert på den. Flere elever mumler noe, og Beate foreslår vekstfart (linje K.10 og K.11). Hun virker noe usikker. Av Beates svar, tolker jeg data som om læreren går inn i ”gjett hva læreren tenker”-mønsteret beskrevet av Mason (1998) og Alrø og Skovsmose (2002). Elevene skjønner at læreren er ute etter et bestemt svar, så Beate gjetter vekstfart. Læreren lurer på om det stemmer at det er vekstfarten som registreres, og flere elever snakker i munnen på hverandre (linje K.12 og K.13). Da Roger nevner høyde, nominerer læreren ham til å svare. Roger gir elevrespons ved å svare at det er høyden til grana. Læreren viser bekreftelse ved å nikke og gjenta svaret til Roger (linje K.14 til K.16). I siste delen av samtalen er det derfor min vurdering at læreren kommuniserer med elevene gjennom IRE-mønsteret (Cazden, 2001). Hun har fanget opp at Roger kjenner det rette svaret og retter derfor spørsmålet direkte til ham. Roger gir respons som læreren deretter evaluerer.

Som beskrevet i delkapittel 4.1, er det ikke bare læreren som stiller spørsmål; også elevene gjør det. Læreren tar da tak i elevenes spørsmål. Likevel går ofte kommunikasjonen inn i ”gjett hva læreren tenker”-mønsteret, slik som i situasjon 2. Dersom elevene svarer feil, har læreren en tendens til å betvile korrektheten i svarene deres og gir slik implisitt topazeeffekt. Følgende situasjon belyser disse kjennetegnene:

Situasjon 3:

K.17	Ole:	Scroller du ut litt så vi får se hele greia?
K.18	Lærer:	Men...Er det interessant?
K.19	Flere elever:	[mumling] Nei...
K.20	Lærer:	Hva sier, ehm, hva sier den her her om grana? [peker langs x-aksen, lander på origo]
K.21	Mia:	(virker usikker) Vi må begynne på null?
K.22	Lærer:	Vi må begynne på null. Vi kan ikke begynne før null kan vi vel?
K.23	Flere elever:	Nei...
K.24	Lærer:	Nei..For da har vi jo ikke plantet frøet engang. Men hva sier det om veksten til grana? Vokser den jevnt hele veien?
K.25	Flere elever:	Nei...
K.26	Lærer:	Nei...Roger?
K.27	Roger:	Etter hvert så får den røtter lenger ned i jord og så...
K.28	Lærer:	Ja, og da?
K.29	Roger:	Da skyter den i været. [elever ler]
K.30	Lærer:	[peker langs grafen] Den gjør den. Men når den blir ganske høy da? Hva skjer her oppe?
K.31	Roger:	Da dør den.
K.32	Flere elever:	Den dør.
K.33	Lærer:	Begynner den å dø?
K.34	Frida:	Den blir mindre.
K.35	Lærer:	Blir den mindre?

K.36	Roger:	Nei, den trenger ikke å bli høyere.
K.37	Lærer:	[peker på toppen] Blir treet mindre og mindre her?
K.38	Mia:	Nei, den slutter å vokse.
K.39	Lærer:	Ja, det gjør den.
K.40	Frida:	Men...
K.41	Mia:	Joda..
K.42	Lærer:	Men det ser ut som om den blir mindre og mindre. [peker der grafen begynner å synke] Går det an det?
K.43	Flere elever:	Nei...
K.44	Lene:	Det blir jo uinteressant.
K.45	Lærer:	Og det er vel derfor at vi har et definisjonsområde.

Selv om læreren i flere tilfeller har en klar styring på retningen på samtalene, åpner hun likevel for elevspørsmål og tar tak i dem (linje K.17 til K.18). Det viser at selv om kommunikasjonen mellom læreren og elevene har en tendens til å følge IRE/IRF-mønsteret, kan den også gå ut av sporet, slik som i situasjonen her. Læreren tar altså tak i Oles spørsmål og lurer på om det er interessant å scrolle ut. Min vurdering er at fra det neste spørsmålet hennes om ”Hva sier denne her om grana?”, styrer læreren kommunikasjonen inn i ”gjett hva læreren tenker”-mønsteret. Læreren vet nok hva hun vil frem til og søker ett bestemt svar, men for meg som observatør er det vanskelig å få helt tak i det. Mens hun snakker peker hun langs x-aksen, og fingeren hennes lander i origo (linje K.20). Jeg tolker data slik at det er det som får Mia til å svare at grafen begynner på null. Mia bruker altså et ikke-matematisk stikkord, i form av lærerens peking, som indikator på lærerens hensikt. Slik mener jeg at Mia her viser stikkordsbasert oppførsel (Boaler, 1998; Boaler, 1999). Videre fortsetter læreren med å stille en serie spørsmål. Hun vil vite hvordan grana vokser og hva som skjer på toppen. Elevene foreslår først at den dør, deretter at den blir mindre. Læreren styrer nå hele retningen på kommunikasjonen, og jeg tolker data slik at elevene må anstrenge seg for å følge hennes tankegang. Elevene ser ut til å gjette på lærerens spørsmål (linje K.31 og K.34), eller gjentar det andre har sagt (linje K.32). Det er typiske kjennetegn for ”gjett hva læreren tenker”-mønsteret (Alrø & Skovsmose, 2002). Når elevene svarer feil, betviler læreren korrektheten i svarene deres gjennom å gjenta dem som spørsmål (linje K.33 og K.35). Det er et eksempel på implisitt topazeeffekt (Novotná & Hošpesová, 2007). Jeg tolker data slik at læreren forsøker å vise at svaret er galt, uten å si det direkte. Gjennom å returnere elevenes utsagn som spørsmål, gir hun en implisitt form for hjelp.

I oppsummeringsdelen av undervisningsøktene er læreren interessert i å høre hvilke mønster og systemer elevene har sett i oppgavene de har jobbet med. Her kjennetegnes kommunikasjonen av at læreren enten kun ber om elevenes svar, uten at hun søker noe mer utdypning og/eller forklaring. Andre ganger tar hun tak i enkelte aspekt ved en elevs løsning og retter fokus mot den. Følgende situasjon illustrerer dette:

Situasjon 4:

K.46	Lærer:	Når funksjonen var minus x i andre. Hva var regelen da?
K.47	Mia:	Jeg ganget x-verdien med minus to.
K.48	Lærer:	Ganget x-verdien med minus to. Fikk dere...Det hadde alle funnet ut? [elever nikker] Flott. Så kom vi til den oppgave tre, der funksjonsuttrykket var x i andre pluss tre. Hva ble systemet der? Opp med ei hånd de som har et system (pause). Anna?
K.49	Anna:	Man ganger x-verdien med to. Og så driter du i tretallet.
K.50	Lærer:	Eh ja. Altså vi har en litt mer, litt annerledes fagspråk vanligvis. Men innholdet er det samme. [ler] Sant? Hvorfor, hvorfor kan vi drite i tretallet? Mia?
K.51	Mia:	Fordi det er den samme, samme grafen. Bare at den er flyttet lenger opp.
K.52	Lærer:	Ja. Og Beate hadde et bra navn på det.
K.53	Beate:	De er formlike. Den er flyttet tre plasser lengre opp på y-aksen. Men de har samme form og størrelse.
K.54	Lærer:	Akkurat. Supert.

Læreren ber elevene forklare hvilke regler eller systemer de har funnet, først for funksjonen $k(x) = -x^2$ (linje K.46). Mia forklarer hva hun har funnet ut, og læreren forhører seg om at alle har funnet det samme systemet (linje K.47 og K.48). Min vurdering er at den første delen av samtalen fortsatt er innenfor IRE/IRF-mønsteret. Læreren stiller et spørsmål hun allerede kjenner svaret på, og som hun forventer at elevene også har funnet ut. Mia gir respons på lærerens spørsmål, og læreren evaluerer svaret. Hun ber ikke om noen forklaring eller utdypning på Mias løsning. Videre vil læreren vite hvilket system elevene har sett for funksjonen $g(x) = x^2 + 3$. Anna har observert at for funksjonen $g(x) = x^2 + 3$ vil stigningstallet til tangenten i et hvert punkt *x,* kunne finnes ved å multiplisere *x*-verdien med to. Tretallet spiller dermed ingen rolle (linje K.49). Læreren ber om en forklaring på hvorfor elevene kan "drite i tretallet" og går slik inn i fokuseringsmønsteret beskrevet hos Wood (1995; 1998). Hun kjenner til at Beate har et navn for å beskrive at tangentene i et hvert punkt for $f(x) = x^2$ og $g(x) = x^2 + 3$ har samme stigningstall (linje K.52). Her tolker jeg data som om læreren har planlagt å be om Beates forklaring, fordi hun ønsker å rette fokus på hvorfor elevene kan "drite i tretallet". Hun vil at de skal fokusere på det unike aspektet ved Beates løsning: Beate har gjenkjent at $f(x) = x^2$ og $g(x) = x^2 + 3$ har samme form og størrelse, men den sistnevnte er tre plasser høyere oppe på y-aksen. Hun kaller dem formlike. Læreren retter altså fokus mot et gitt aspekt ved en elevs løsning, slik som er typisk for fokuseringsmønsteret (Wood, 1995; Wood, 1998). Hennes avsluttende kommentar (linje K.54) viser at hun mener at Beate har kommet med et viktig innspill. Et sentralt kjennetegn ved fokuseringsmønsteret er også at læreren først snevrer elevenes oppmerksomhetsfelt mot et gitt aspekt ved en løsning. Deretter trekker han seg tilbake for ikke å styre hvordan de andre elevene skal formulere sin løsning (Wood, 1995; Wood, 1998). I dialogen sier læreren ingenting om at alle elevene bør skrive ned Beates forklaring eller tanker. Hun retter oppmerksomheten mot Beates løsning, men trekker seg deretter tilbake slik at de andre elevene kan formulere sine tanker om oppgaven slik de selv ønsker. Hun signaliserer at Beates forklaring er viktig, men uttrykker ikke at de andre elevene trenger å formulere seg på samme måte som Beate.

5.1.2 Kommunikasjon mellom lærer og enkeltelever/mindre elevgrupper

Mens elevene arbeider med oppgavene i kompendiet, går læreren rundt og hjelper dem. Noen ganger tar hun selv initiativet til å spørre elevene hvordan det går; andre ganger tar elevene kontakt.

Et typisk kjennetegn på kommunikasjonen er at læreren hjelper elevene med å uttrykke sine matematiske tanker og ideer ved å *lokalisere* deres oppfattelse av et matematisk problem. Følgende situasjon viser hvordan:

Situasjon 5:[12]

K.55	Lærer:	Og her har du antydet et system [ser på hva Ole har gjort]. Kan du beskrive med ord det systemet du ser?
K.56	Ole:	(pause, ser ned på arket) Nei.
K.57	Lærer:	Altså, hvis jeg hadde skrevet x lik tre.
K.58	Ole:	Da hadde det sikkert blitt seks da.
K.59	Lærer:	Okei. Hvorfor tenkte du det?
K.60	Ole:	For de andre var dobbelt så mye.
K.61	Lærer:	Javel, da har du et system.
K.62	Ole:	Er det seks?
K.63	Lærer:	Det er jo bare å finne ut det.
K.64		[Ole sjekker i GeoGebra, finner at stigningstallet til tangenten i punktet x = 3 er seks]
K.65	Lærer:	Og da har du funnet et system.

[12] Eleven og læreren snakker om systemet for funksjonen $h(x) = x^2$

Her er det min vurdering at læreren kommuniserer med Ole gjennom en mini-IC-modell, en IC-modell der ikke alle elementene er til stede (Alrø & Skovsmose, 2002). Læreren ser først over hva Ole har gjort, og slik kommer de to i *kontakt* (linje K.55). Slik begynner hun også å *lokalisere* hva hun tror at han har tenkt. Læreren mener at Ole har antydet et system og lurer på om han klarer å uttrykke det med ord. Ole klarer ikke det (linje K.56). Helt alene er altså ikke Ole i stand til å uttrykke, verken skriftlig eller muntlig, det mønsteret han har sett. Jeg vil dermed si at eleven på det aktuelle utviklingsnivået som definert av Vygotsky (1978) ikke klarer å beskrive systemet han ser. Læreren gir Ole en oppgave: Hva hvis *x* var lik tre? (linje K.57). Ole mener at det sikkert ville blitt seks da, siden de andre var dobbelt så mye (linje K.58 og K.60). Ole *tenker høyt* mens han snakker med læreren, og de diskuterer om det kan stemme at det blir seks. Ved at læreren gir Ole en konkret oppgave og deretter følger opp med det *undersøkende spørsmålet*: ”Hvorfor tenkte du det?”, hjelper hun eleven med å sette ord på det mønsteret han ser. Slik fasiliterer hun elevens forsøk på å forklare (Yackel, 1995). På det potensielle utviklingsnivået klarer Ole altså å uttrykke systemet han ser (Vygotsky, 1978). Jeg tolker data som om læreren retter undervisningen inn mot den nærmeste utvikingssonen til eleven. Gjennom undersøkende spørsmål (linje K.57 og K.59) hjelper hun Ole til selv å kunne gi uttrykk for hvilket mønster han ser. Jeg tolker data slik at læreren bidrar med stillasbygging. Ole bruker støtten fra læreren mens han bygger en solid forståelse (Wood, Bruner & Ross, 1976).

I denne samtalen finner jeg igjen elementene: Å komme i kontakt, lokalisere og høyttenkning (Alrø & Skovsmose, 2002). Min vurdering er at lokaliseringsfasen er den mest sentrale. Ole har egentlig sett et mønster, men har vanskeligheter for å uttrykke det. Gjennom at læreren fungerer som en fasilitator og stiller undersøkende spørsmål, hjelper hun eleven å uttrykke sine matematiske tanker og ideer. To ganger i løpet av samtalen forteller læreren Ole at han har funnet et system (linje K.61 og K.65). Det viser at hun noen ganger kan være litt rask med å konkludere at eleven allerede har funnet en løsning, noe som i følge Yackel (1995) ofte kan skje når læreren hjelper elevene å utvikle mulige løsninger.

Et annet kjennetegn på kommunikasjonen er at læreren *utfordrer* elevene videre og oppmuntrer dem til å se egne system, slik følgende situasjon viser:

Situasjon 6:

K.66	Lærer:	Har du den her x i tredje her? [ser på skjermen]
K.67	Håvard:	Da ble den tre.

K.68	Lærer:	Da ble den tre ja.
K.69	Håvard:	Og den ble 12.
K.70	Lærer:	Så det er noe mer der.
K.71	Håvard:	Mmm.(pause) Men du opphøyer jo den i tredje.
K.72	Lærer:	Ja?
K.73	Håvard:	Det blir jo ikke det heller.
K.74	Lærer:	Men du nærmer deg skjønner du. Og det kan hende at hvis du prøver flere, hvis du setter opp flere punkter i et system at du klarer å avsløre det.
K.75	Håvard:	Mmm.
K.76	Lærer:	Det kunne du ha prøvd.

Igjen er det min vurdering at læreren her kommuniserer gjennom en mini-IC-modell (Alrø & Skovsmose, 2002), altså en IC-modell der ikke alle elementene er til stede. Læreren tar først *kontakt* med Håvard for å se hvordan det går med hans forsøk på å se et mønster for funksjonen *h(x)* = x^3 (linje K.66). Håvard har sett at for *x = 1* ble tangentens stigningstall lik tre. Læreren gjentar hans utsagn, og slik *lokaliserer* hun hva eleven har gjort og tenkt. For *x = 2* ble tangentens stigningstall lik 12 (linje K.69). Læreren følger opp med å kommentere at det er noe mer der. Slik signaliserer hun at systemet nok ikke er så enkelt som at tangentens stigningstall i et punkt *x* skal multipliseres med tre. Videre *forhandler* læreren og Håvard om hvordan systemet kan være, og Håvard *tenker høyt* (linje K.70 til K.74). Læreren *utfordrer* Håvard til å forsøke å sette opp flere punkter slik at han blir i stand til å se systemet (linje K.76).

I dialogen mellom læreren og Håvard finner jeg igjen elementene: Komme i kontakt, lokalisere, forhandle, tenke høyt og utfordring (Alrø & Skovmose, 2002). Min vurdering er at utfordringsfasen er den mest sentrale i denne dialogen. Håvard har allerede løst flere av de andre oppgavene og sett systemene der. Nå oppmuntrer læreren ham til selv å forsøke å se systemet for funksjonen *b(x)* = x^3, et mønster som kan være vanskeligere å oppdage enn de andre. Et viktig aspekt ved samtalen er også at læreren aktivt lytter til Håvards utsagn og tar utgangspunkt i hans perspektiv (linje K.68, K.72 og K.74). Slik oppfylles en viktig betingelse for at en dialog skal kunne klassifiseres som en IC-modell (Alrø & Skovsmose, 2002).

Kommunikasjonen kjennetegnes også av at mens elevene arbeider, sjekker læreren hva de har gjort. Hun bidrar med hint og veiledning mens hun tar del i elevenes utforskningsprosess. Følgende situasjon viser det:

Situasjon 7:

K.77	Nina:	Vi fikk litt hjelp fra dem...Men vi skjønner ikke helt hvorfor.
K.78	Lærer:	Nei...Vi har ikke forklart så mye hvorfor, men vi har, vi er veldig ute etter et mønster og et system.
K.79	Nina:	Mmm.
K.80	Lærer:	Stemmer det hele veien her? [ser på hva elevene har gjort på oppgaven som omhandler x^3]
K.81	Nina:	Ja.
K.82	Lærer:	Okei. Så har de gitt deg et mønster her. [ser på hva elevene har gjort på oppgaven som omhandler x^4] Stemmer det? Skal vi se...fire ganger en i andre er fire. Fire ganger to i andre...
K.83	Hanne og Nina:	[veksler blikk, ler]
K.84	Lærer:	Ja, nå tror jeg de har lurt dere littegranne altså.
K.85	Nina:	Må se...[finner frem kalkulator]
K.86	Hanne:	To i andre er jo fire. Fire ganger fire er seksten.
K.87	Lærer:	Her er det noe som ikke stemmer.
K.88	Nina:	Ja.
K.89	Hanne:	Mmm.
K.90	Lærer:	Men dere er inne på noe. Hvis vi går tilbake til den der som ble to x. Altså x i andre henger sammen med to x. X i tredje, det henger sammen med tre x i andre. (pause) Er dere på sporet av noe da?
K.91	Nina:	Kan ikke du gi oss et lite hint til?
K.92	Lærer:	Jeg skal si det en gang til. Hvis du har x i andre, så vil stigningstallet til, til tangenten i et punkt være to x i første.
K.93	Nina:	Ja.
K.94	Hanne:	Mmhm.
K.95	Lærer:	Hvis du har x i tredje, så vil stigningstallet være tre x i andre.
K.96	Nina:	Og så blir det fire x i tredje!
K.97	Lærer:	Prøv det du.

Læreren kommer først i *kontakt* med Nina og Hanne ved å lytte til og se over hva de har gjort (linje K.77 til K.81). Hun *lokaliserer* hva jentene har gjort og hvordan de har tenkt (linje K.78 til K.83). Samtidig *identifiserer* både læreren og jentene at mønsteret Hanne og Nina har funnet ser ut til å stemme for funksjonen $b(x) = x^3$, men kanskje ikke for $d(x) = x^4$. Læreren og elevene *forhandler* om mønsteret for $d(x) = x^4$ kan stemme eller ikke og prøver å sjekke om det stemmer. Alle tre *tenker høyt* (linje K.82 til K.89). Læreren *utfordrer* elevene til å forsøke å se systemet selv (linje K.90).

Min vurdering er at dialogen mellom læreren og jentene er en ganske utviklet IC-modell. Av fasene Alrø og Skovsmose (2002) beskriver, er omformuleringsfasen den eneste jeg mener ikke er til stede. Etter at læreren har utfordret elevene til å selv se systemet for $d(x) = x^4$, gir hun på oppfordring fra Nina et hint. Hun beskriver med ord det systemet elevene allerede har observert for $h(x) = x^2$ og $b(x) = x^3$ (linje K.91 til K.95). Det fører til at Nina plutselig utbryter at mønsteret må være fire x i tredje for $d(x) = x^4$ (linje K.96). Slik fungerer også læreren i denne dialogen som et verktøy for elevenes læring (Vygotsky, 1978). Hun strukturerer den nødvendige informasjonen slik at jentene selv kan få anledning til å oppdage mønsteret. Læreren gir den støtten, voksenassistansen, som er nødvendig for at elevene selv skal få komme frem til svaret (Wood, Bruner & Ross, 1976). Til slutt (linje K. 43) *evaluerer* læreren Ninas forslag. Hun ber elevene teste ut om forslaget stemmer. Læreren kommuniserer altså her med elevene gjennom en IC-modell og tar slik del i deres utforskningsprosess. Når det er nødvendig bidrar hun med hint og veiledning.

Videre kjennetegnes kommunikasjonen av at læreren gjerne forlater elevene etter at hun har *forhandlet* med dem om veien videre og *utfordret* dem, for så å returnere senere i timen. I enkelte tilfeller er hun litt rask med å konkludere at elevene allerede har sett mønsteret i en oppgave. Følgende situasjon viser dette:

Situasjon 8:[13]

K.98	Josefine:	Se her...der...Det blir jo to ganger en da pluss en.	*Kommer i kontakt ved aktiv lytting (K.98 til K.101)*
K.99	Lærer:	Okei.	
K.100	Josefine:	Som blir tre.	
K.101	Lærer:	Jaha.	
K.102	Josefine:	Men når du tar, eh når det blir to, så blir det to ganger to, som blir fire. Pluss to, som blir seks.	*Lokalisering og identifisering (K.102 til K.107)*
K.103	Lærer:	Gjør det det?	
K.104	Josefine:	Eh...	
K.105	Lærer:	Hvorfor har du skrevet at stigningstallet...[peker]	
K.106	Josefine:	For det står i GeoGebra.	
K.107	Lærer::	Jamen, da er vel stigningstallet fem da?	
K.108	Josefine:	Men jeg skjønner ikke hvordan?	*Forhandling og høyttenkning om veien videre (linje K.108 til K.111)*
K.109	Lærer:	Eh...Kanskje hvis vi hadde laget en tangent i x lik tre, så hadde du fått avklart om...hvilket av de to ideene dine som virkelig stemmer.	
K.110	Josefine:	Okei...da blir det...Da må jeg sjekke på GeoGebra.	
K.111	Lærer:	Det tror jeg du må gjøre.	*Utfordring til å prøve videre*

[13] Oppgaven Josefine arbeider med er presentert i delkapittel 4.1. Hun forsøker å finne systemet for funksjonen $b(x) = x^2 + x$.

			(linje K.111)
		....	
K.112		[Læreren går og returnerer senere i timen for å sjekke hvordan det har gått]	*Pause i samtalen*
		....	
K.113	Lærer:	Stemte det? Fikk du syv her?	*Gjenopptar kontakten*
K.114	Josefine:	Ja.	
K.115	Lærer:	Jaha. Men hvis du nå, hvis du nå skriver de stigningstallene her som du hadde i fra den aller første grafen. Og du og [ser på Lene]. [ser i elevenes kompendium] Der het den *h* ja. Da må dere skrive.	
K.116		[Elevene fyller ut tabellene i oppgaven, se oppgavetype nr 2]	
K.117	Josefine:	Jeg klarer ikke forstå det her.	
K.118	Lærer:	Er det noen sammenheng mellom de to og de to og de to? [peker nedover langs de to kolonnene]	*Utfordring (linje K.118 til K.121)*
K.119	Josefine:	Ja, jeg sa jo det ble en.	
K.120	Lærer:	Ja, okei. Bra. Og her kom du til å få...? [peker på arket]	
K.121	Josefine:	Minus en.	
K.122	Lærer:	Nydelig. Hun Lene har grafen, så dere kan se på den, om det her stemmer. Stemmer det med de tallene dere har lest av nå?	*Diskusjon om elevene virkelig har sett systemet eller ikke (linje K.122 til K.133)*
K.123	Lene:	Ja, altså...ja.	
K.124	Lærer:	Ja. Da har du kontroll på det systemet her.	
K.125	Josefine:	Jeg ser ikke systemet for det.	
K.126	Lærer:	Du sa til meg at du tok det der stigningstallet der, og så la du til en.	
K.127	Josefine:	Ja.	
K.128	Lærer:	Det er ikke noe mer å si.	
K.129	Josefine:	Men hvorfor kan vi ikke regne det ut når vi...eh...	
K.130	Lærer:	Det er et system som kan regnes ut.	
K.131	Josefine:	Ja, okei. Men jeg ser det nå.	
K.132	Lærer:	Gjør du det?	
K.133	Josefine:	Ja. Jeg gjør det.	
K.134	Lene:	Men altså, okei. [ler] Ja, så det blir alltid sånn at vi kan si at siden det står pluss x, så blir det på en måte at x er en. For å liksom få det...	
K.135	Lærer:	At stigningstallet er en...Ja, hva du tror som vil skje her da? [peker på neste oppgave]	*Ny utfordring (linje K.135 til K.141)*
K.136	Lene:	Det blir...(pause)	
K.137	Lærer:	Ja, gjett. Det er lov å gjette. I vildens	

		sky.	
K.138	Lene:	Pluss to...? Fordi du har...	
K.139	Josefine:	To ganger en.	
K.140	Lærer:	Okei. Så du tror at her vil du få fire og seks og to...	
K.141	Josefine:	Jeg tror du får to mer der enn der [peker på oppgavene på arket]. Får man det?	
K.142	Lærer:	Ja, det dere tipper nå, ta og sjekk det.	*Evaluering*

I første del av samtalen kommer læreren i *kontakt* med Josefine ved aktiv lytting (linje K.98 til K.101). Hun forsøker å *lokalisere* elevens perspektiv ved å spørre om Josefine er sikker på at stigningstallet blir seks, siden hun har skrevet at det blir fem i oppgaven. Slik hjelper hun også eleven å *identifisere* hva hun egentlig har funnet ut; har Josefine funnet at stigningstallet er fem eller seks? (linje K.102 til K.107). Videre *forhandler* læreren og eleven om veien videre. Læreren foreslår at eleven skal finne stigningstallet til tangenten for nok et punkt (for $x = 3$), da det kan hjelpe henne å se mønsteret. Josefine vil sjekke det i GeoGebra. Begge *tenker høyt* mens de snakker med hverandre (linje K.108 til K.111). Læreren *utfordrer* Josefine til å selv finne hvilket mønster tangentens stigningstall følger (linje K.111). Læreren går og kommer tilbake senere i timen. Hun gjenopptar kontakten med Josefine med å spørre om hun fikk syv (linje K.113). Læreren oppmuntrer elevene til å fylle ut tabellen i oppgaven, siden det kan hjelpe dem å se mønsteret. Hun inkluderer også Lene, som sitter ved siden av Josefine, i samtalen. Videre *utfordrer* hun elevene til å beskrive sammenhengen de ser mellom tangentenes stigningstall for $b(x) = x^2 + x$ og $h(x) = x^2$ (linje K.118). Min vurdering er at samtalen mellom Josefine og læreren, og etter hvert også Lene, er en IC-modell. Jeg finner igjen fasene: å komme i kontakt, lokalisere, identifisere, forhandling, tenke høyt og utfordring. Videre mener jeg at en av de viktigste betingelsene for at en dialog skal kunne klassifiseres som IC-modellen er oppfylt: Læreren tar utgangspunkt i elevens perspektiv. Hun forstår at Josefine er usikker på hva stigningstallet egentlig blir for $x = 2$. I følge GeoGebra er svaret fem, men Josefine hadde forventet at det skulle bli seks (linje K.102 til K.108). Læreren oppmuntrer da Josefine til å undersøke hvilken av ideene som ser ut til å stemme (linje K.109). Slik avviser hun ikke Josefines teori, men ber henne undersøke om den kan være korrekt. Læreren tar dermed utgangspunkt i hva eleven allerede har tenkt om oppgaven.

Senere i samtalen gir Josefine uttrykk for at hun ser at sammenhengen er én, men mener likevel at hun ikke forstår systemet (linje K.117, K.119 og K.125). Læreren erklærer at det er systemet; det er ikke mer å si (linje K.124 til K.128). Her tolker jeg data slik at læreren utilsiktet hemmer elevens forsøk på å forklare. Det er noe som kan skje når læreren hjelper elevene å utvikle mulige løsninger (Yackel, 1995). Hun stadfester at eleven allerede har sett mønsteret, selv om Josefine ikke føler det selv (linje K.125). Slik hindrer hun Josefine i å selv finne ut hvilke aspekt ved systemet som hun trenger å utdype og forklare mer (Yackel, 1995).

Etter at Josefine har blitt sikker på at hun virkelig ser systemet (linje K.131 til K.133), har Lene et spørsmål. Hun lurer på at om det alltid blir slik at når det står "... $+ x$", så vil tangentens stigningstall bli "...$+1$" (linje K.134). Læreren lar elevene utforske denne tanken. Hun gir dem en ny *utfordring* ved å be elevene gjette hva mønsteret vil bli i neste oppgave, for funksjonen $e(x) = x^2 + 2x$. Både Lene og Josefine kommer med forslag til hva de tror systemet blir (linje K.137 til K.141). Læreren *evaluerer* deretter elevenes forslag og oppmuntrer dem til å sjekke om systemet de foreslår stemmer (linje K.142). Hun sier ikke om forslaget er rett eller galt, men signaliserer at det er verdt å undersøke om det stemmer.

Min vurdering er at dialogen er en ganske utviklet IC-modell. Data viser også at alle fasene i IC-modellen ikke trenger å forekomme i samme samtale. I dette tilfellet går læreren fra elevene etter å ha gitt dem en utfordring (linje K.112), men returnerer senere for å sjekke hvordan det går. Hun gir dem da en ny utfordring og evaluerer deres forslag. Samtidig viser også data at flere elever kan delta i samme utforskningsprosess.

5.1.3 Oppsummering av kjennetegn på kommunikasjonen

Samtalene mellom læreren og elevene i helklassen har en blanding av en løs og stram struktur. I flere tilfeller har læreren en klar styring på retningen på samtalene, slik situasjon 1 viser. Hun kommuniserer da med elevene gjennom IRE/IRF-mønsteret. Samtidig stiller hun ofte mer åpne spørsmål, men havner gjerne inn i "gjett hva læreren tenker"-mønsteret, slik både situasjon 2 og situasjon 3 illustrerer. Elevene får også anledning til å stille egne spørsmål, og læreren bruker tid på å forklare eller diskutere det de lurer på, som vist i situasjon 3. Det viser at selv om kommunikasjonen mellom læreren og elevene ofte følger IRE/IRF-mønsteret, kan også samtalene gå ut av sporet. Dersom elevene svarer feil, har læreren en tendens til å betvile korrektheten i svarene deres. Hun returnerer svarene som spørsmål, slik situasjon 3 gir et eksempel på. Da gir hun en implisitt form for topazeeffekt.

I oppsummeringsdelen av timen vil læreren vite hvilke mønster eller systemer elevene har sett i oppgavene de har arbeidet med. Da kjennetegnes kommunikasjon av at læreren i mange tilfeller kun ber om elevenes svar, uten at hun søker noe mer utdypning og/eller forklaring. Hun kommuniserer dermed med elevene gjennom IRE/IRF-mønsteret. Andre ganger tar hun tak i enkelte aspekt ved en elevs løsning og retter oppmerksomheten mot den, slik som i situasjon 4. Det er et typisk kjennetegn på fokuseringsmønsteret.

Verken i introduksjons- eller oppsummeringsdelen av timen ble noen av samtalene mellom læreren og elevene klassifisert som traktmønsteret. Jeg har heller ikke identifisert noen andre former for eksplisitt topazeeffekt i datamaterialet.

I samtaler med én og én elev eller mindre grupper av elever kjennetegnes kommunikasjonen av at læreren hjelper elevene med å uttrykke sine matematiske tanker og ideer. Hun forsøker å *lokalisere* hvordan elevene har oppfattet et gitt problem og hva de har tenkt, slik situasjon 5 viser. Videre vil hun ofte gi elevene en *utfordring* og oppmuntre dem til å se egne mønster og systemer (situasjon 6). Hun gir også hint eller veiledning mens hun tar del i elevenes utforskningsprosess (situasjon 7). Et typisk kjennetegn er også at hun forlater en elev eller en elevgruppe etter å ha *forhandlet* med dem om veien videre eller gitt en *utfordring*. Hun returnerer så senere i timen for å fortsette å ta del i utforskningsprosessen, slik som i situasjon 8. Ingen av samtalene mellom læreren og enkeltelever eller mindre grupper av elever har blitt klassifisert som traktmønster eller topazeeffekt. Derimot kan læreren i noen tilfeller være litt rask med å konkludere ovenfor en elev at han har funnet systemet, selv om kanskje ikke eleven føler det selv (situasjon 8). Yackel (1995) påpeker at det lett kan skje når læreren hjelper elevene med å utvikle egne løsningsstrategier.

Et felles kjennetegn ved kommunikasjonen mellom læreren og enkeltelever/mindre elevgrupper, er at hun alltid tar utgangspunkt i deres oppfattelse av et gitt problem. Hun lytter ofte aktivt mens elevene uttrykker sitt perspektiv. Videre skaffer seg hun informasjon om hvordan en elev tenker gjennom undersøkende spørsmål, slik som i situasjon 5. Dersom en elev tror at han har funnet et system, men det viser seg å være feil, avviser ikke læreren elevens teori. I samtalen med Josefine (situasjon 8) ber hun heller eleven om å undersøke om teorien stemmer eller ikke. Samtalene mellom læreren og elevene er altså mer eller mindre utviklede IC-modeller, der enten de fleste eller kun noen elementer er til stede. Uansett hvor mange elementer som er en del av samtalen, skaffer læreren seg informasjon om hva eleven har tenkt om en oppgave og tar utgangspunkt i det. Dermed er en av de viktigste betingelsene for at en samtale skal kunne klassifiseres som en IC-modell oppfylt.

5.2 Analyse av data fra Storåsen videregående skole

For å belyse kjennetegn på kommunikasjonen mellom læreren og elevene i klassen har jeg valgt å presentere to dialoger fra helklassen. Jeg presenterer også fire dialoger fra lærerens samtaler med enkeltelever eller mindre elevgrupper. I datamaterialet fant jeg at det er liten variasjon i måten læreren kommuniserer med elevene sine på. Kommunikasjonen går inn i gitte mønster, men det varierer noe hvilke elementer fra mønstrene som preger hver samtale.

5.2.1 Kommunikasjon i helklassen

Som beskrevet i delkapittel 4.2, kommuniserer læreren med hele klassen kun i introduksjonen av nytt stoff i starten av hver undervisningsøkt. Det var ingen felles oppsummeringsdel på slutten.

Et typisk kjennetegn på kommunikasjonen mellom deltakerne er at læreren stiller presise spørsmål som elevene deretter gir respons på. Hun starter ofte med en mer åpen oppgave, som hun deretter deler inn i enklere, eksplisitte spørsmål som elevene skal svare på. Følgende situasjon illustrerer det:

Situasjon 9:

S.1	Lærer:	...Kortstokk. Da var vi enige om sist at det var to og femti kort. [skriver "Kortstokk 52 kort" på tavla] Tar ikke med joker, vi tar de to og femti vanlige. Og da skal vi trekke ett av de korta. Og da skal vi finne sannsynlighet. Hvilken bokstav var det vi brukte for sannsynlighet?
S.2	Elever:	P.
S.3	Lærer:	[nikker, skriver "P(dame) = " på tavla] Hvis vi tar sannsynligheten for at vi trekker ei dame, eh...hvis vi har blanda kortene, og ikke noe sortering? [pause, ingen respons fra elevene] Hvor mange mulige utfall er det?
S.4	Lotte:	Fire
S.5	Lærer:	Men hvor mange *mulige* utfall kan vi få?
S.6	Martin:	Femtito
S.7	Lærer:	Femtito ja. Men eh...hvor mange utfall er det som gir dame?
S.8	Lotte:	Fire
S.9	Lærer:	Ja. Det er fire damer av femtito kort. [skriver "P(dame) = 4 / 52 " på tavla]

Læreren spør først etter hvilken bokstav som brukes for sannsynlighet. Flere elever svarer i kor at det er P. Læreren bekrefter at det er riktig ved å nikke (linje S.1 til S.3). Her tolker jeg data slik at læreren kommuniserer med elevene gjennom IRE-mønsteret. Hun tar *initiativ* ved å stille et spørsmål. Elevene følger opp med å gi *respons* på spørsmålet som deretter *evalueres* av læreren. Videre vil læreren at elevene skal finne sannsynligheten for å trekke ei dame ut fra kortstokken (linje S.3). Her omformulerer hun etter en kort pause spørsmålet til at elevene først skal finne antall mulige utfall. Lotte svarer først fire, noe som fører til at læreren vektlegger ordet *mulige* (linje S.4). Martin gir det korrekte svaret, og læreren følger opp med et nytt spørsmål. Min vurdering er at kommunikasjonen mellom læreren og elevene i hovedsak følger IRE/IRF-mønsteret. Læreren tar initiativ ved å stille elevene spørsmål, som de gir respons på. Hun evaluerer deres svar, enten ved å gjenta svaret eller si ”Ja” (linje S.7 og S.9). Samtidig følger hun opp svaret deres ved å stille et nytt spørsmål og gir slik mer generell feedback (Wells, 1999).

Selv om kommunikasjonen i hovedsak følger IRE/IRF-mønsteret, tolker jeg data slik at det også er elementer fra traktmønsteret og topazeeffekten her. Læreren vil at elevene skal finne sannsynligheten for å trekke ei dame (S.3). Etter en kort pause der ingen elever gir respons, gjør hun oppgaven enklere ved å først be elevene finne antall mulige utfall. Hun starter med en mer åpen oppgave: Hva er sannsynligheten for å trekke ei dame? Den deler hun deretter inn i enklere, mer eksplisitte spørsmål, noe som er kjennetegnet for traktmønsteret (Bauersfeld, 1988). Læreren stiller altså spørsmål direkte relatert til fremgangsmåten, noe som er en eksplisitt form for topazeeffekt (Novotná & Hošpesová, 2007). Gjennom å spørre elevene om antall mulige utfall og antall utfall som gir dame, leder hun dem inn mot det rette svaret. Etter at Lotte har svart fire (linje S.8), skriver læreren selv opp hva sannsynligheten er for å trekke ei dame (linje S.9). Dialogen avsluttes ved at løsningen blir produsert, noe som er typisk for traktmønsteret (Bauersfeld, 1988).

Et kjennetegn på kommunikasjonen mellom deltakerne er, som vist i situasjon 9, at læreren stiller elevene spørsmål mens hun regner gjennom oppgaver/eksempler på tavla. Samtidig forklarer hun gjerne selv hvordan elevene skal gå frem for å løse oppgaven. I forklaringer viser hun ofte til lignende oppgaver som elevene har løst tidligere. Slik gir hun eksplisitte former for topazeeffekt. Følgende situasjon viser det:

Situasjon 10:

S.10	Lærer:	Nå skal vi finne ut sannsynligheten for at A eller B er åpen. [skriver spørsmålet på tavla] Nå var det jo mye å skrive, så vi må prøve å se hvilke opplysninger vi har fått. Hva er det vi har fått vite ut fra den oppgaven her? Vi har jo to hendelser, A og B. Vet vi noe om sannsynligheten til de to hendelsene?

S.11	Elever:	Ja...
S.12	Lærer:	Hva vet vi om sannsynligheten til A da? Har vi gitt den eller?
S.13	Guro:	Den er 0,70.
S.14	Lærer:	Den er 0,70 ja. Jeg oppga at sannsynligheten for at fjellovergang A er åpen er 0,70 [skriver "P(A) = 0,70" på tavla] Hva er sannsynligheten for at B er åpen da?
S.15	Guro:	0,80.
S.16	Lærer:	Den er 0,80 ja [skriver "P(B) = 0,80" på tavla] Så på oppgavene, må dere lese oppgaven godt slik at dere klarer å plukke ut de opplysningene dere får. Vet vi noe mer? (pause) Har jeg gitt noen flere opplysninger i oppgaven? Anders?
S.17	Anders:	At begge er åpne er 0,60.
S.18	Lærer:	Ja, hvordan skal jeg skrive det?
S.19	Emma:	A og B.
S.20	Lærer:	Ja, og var det U-en eller den motsatte?
S.21	Emma:	Motsatte.
S.22	Lærer:	Ja. A og B, den var 0,60. [skriver "P(A∩B) = 0,60" på tavla] Er de to hendelsene, A og B, avhengige av hverandre? Er de helt uavhengige av hverandre de to? Hva tror du Eirik?
S.23	Eirik:	Eh...nei. For hvis A ikke er åpen, så kommer du deg ikke til B.
S.24	Lærer:	Eh...Dem kan velge mellom to fjelloverganger, enten vei A eller vei B.
S.25	Eirik:	Å ja.
S.26	Lærer:	Eh...Men hvis dere tenker litt logisk, litt praktisk. Så hvis det er skikkelig uvær, og den ene er stengt, så er det sannsynlig at den andre også har problemer med å holde åpent?
S.27	Elever	Ja.
S.28	Lærer:	Ja. Og dere har jo fått gitt her nå at sannsynligheten for at både A og B er åpen er 0,60. Så de to hendelsene, de er avhengige av hverandre. Det er akkurat det samme sånn som med hjerter og bildekort. Det var et greiere eksempel å forholde seg til. Eh...da hadde dere også at hjerter og bildekort har noe til felles; de er avhengige av hverandre. Og da må vi bruke den der [peker på regelen], vi kan ikke bare summere sannsynligheten for hver av de to hendelsene. Så nå skal vi finne sannsynligheten for A eller B. Da har vi gitt sannsynligheten til A [peker på regelen]. Vi har gitt sannsynligheten til B [peker på regelen]. Og vi har den der [peker på sannsynligheten for A og B] . Så da bruker vi den formelen. Da har vi 0,70 pluss 0,80. Og så trekker vi i fra 0,60. Hva er da sannsynligheten for at A eller B er åpen?
S.29	Hans:	0,9

Læreren lurer først på hva elevene har fått vite fra opplysningene hun har gitt dem på forhånd, og om de vet noe om sannsynligheten for hendelsene A og B (linje S.10). Hun presiserer så spørsmålet sitt slik at hun spør om sannsynligheten for A. Guro svarer korrekt, og læreren bekrefter at svaret er riktig. Hun følger opp med å spørre om sannsynligheten for hendelse B; at fjellovergang B er åpen. Igjen er det min vurdering at kommunikasjonen følger det tradisjonelle IRE/IRF-mønsteret. Initiativet ligger hos læreren, og elevene gir respons på spørsmålene. Kommentarene til læreren på elevenes svar er av evaluerende art; hun gjentar svarene og legger til et "ja" på slutten (linje S.14 og S.16). Samtidig følger hun opp med utdypende kommentarer og/eller nye spørsmål slik at hun også gir mer generell feedback (linje S.14 og S.16). Etter å ha notert ned sannsynligheten for at fjellovergang A er åpen, og deretter gjort det samme for fjellovergang B, etterspør læreren flere opplysninger (linje S.16). Min vurdering er at spørsmålet "Vet vi noe mer?" har elementer av "gjett hva læreren tenker"-mønsteret, da det er vanskelig å vite hvilket svar læreren er ute etter. Etter en liten pause, omformulerer hun spørsmålet til om det er gitt flere opplysninger i oppgaven. Anders svarer at sannsynligheten for at både A og B er åpen er 0,60. Etter en kort diskusjon om hvordan dette skal skrives, vil læreren vite om A og B er avhengige av hverandre. Her tolker jeg data slik at læreren og elevene går inn i et tematisk mønster (Voigt, 1995). De prøver å bli enige om hva det betyr at hendelser er avhengige av hverandre. De utvikler en felles forståelse for hva et begrep betyr, noe som er kjennetegnet ved mønsteret (Voigt, 1995). Eirik tror først at det betyr at hvis A ikke er åpen, kan du heller ikke komme til B (linje S.23). Læreren forsøker å koble begrepet avhengig til sannsynlighet (linje S.24). Videre knytter læreren begrepet til et eksempel elevene har sett tidligere. Hjerter og bildekort har noe til felles; de er avhengige av hverandre (linje S.25). Selv om Eirik i en viss grad bidrar til utviklingen av det matematiske temaet, forklarer læreren likevel hvordan elevene skal tenke (linje S.25). Etter at læreren og elevene i fellesskap har skrevet opp alle opplysningene som trengs for å løse oppgaven, forklarer læreren direkte hvordan elevene skal bruke opplysningene. Regelen forteller at elevene skal summere sannsynligheten for hendelse A og hendelse B, og så trekke fra sannsynligheten for A og B (linje S.25).

Kommunikasjonen mellom læreren og elevene følger altså i hovedsak IRE/IRF-mønsteret, der læreren stiller lukkede spørsmål som elevene gir respons på. Samtidig er det min vurdering, som i den forrige dialogen, at samtalen har elementer fra topazeeffekten og traktmønsteret. Læreren starter med at elevene skal finne sannsynligheten for at fjellovergang A eller B er åpen (S.10). Oppgaven deler hun så inn i mer presise spørsmål. Hun ber først elevene om å finne sannsynligheten for at A er åpen (linje S.12), deretter for B (linje S.14), så etterspør hun flere opplysninger hun trenger (S.16). Hun starter igjen med en mer åpen oppgave: Hva er sannsynligheten at fjellovergang A eller B er åpen? Den deler hun så inn i enklere, mer eksplisitte spørsmål, noe som er kjennetegnet for traktmønsteret (Bauersfeld, 1988). Etter at læreren har skrevet opp alle opplysningene som trengs for å løse oppgaven, forklarer hun selv hvordan opplysningene skal brukes (linje S.28). Hun forklarer direkte de stegene som elevene skal følge. Slik gir hun en eksplisitt form for topazeeffekt (Novotná & Hošpesová, 2007). Et annet interessant kjennetegn ved kommunikasjonen mellom læreren og elevene, er at læreren viser til tidligere løste oppgaver eller eksempler i forklaringer. For å forklare begrepet avhengig, peker hun på et eksempel med hjerter og bildekort (linje S.28). Det er også en form for eksplisitt topazeeffekt (Novotná & Hošpesová, 2007). Oppgaven om å finne sannsynligheten for at fjellovergang A eller B er åpen, er veldig lik en annen "greiere" oppgave (linje S.28). I en klasse eksisterer det et nettverk av matematiske meninger som blir forstått som felles; kalt et matematisk tema (Voigt, 1994; Voigt, 1995). Å sammenligne to oppgaver med hensyn til ulikheter og samsvar mellom dem er et eksempel på et slikt tema. Min vurdering er at det i denne klassen eksisterer en felles forståelse blant deltakerne om at to oppgaver er like dersom den sammen regelen eller fremgangsmåten brukes for å finne svaret. I situasjon 14, som jeg presenterer i delkapittel 5.2.2, vises det igjen.

5.2.2 Kommunikasjon mellom lærer og enkeltelever/mindre elevgrupper

Mens elevene arbeider med matematikkoppgavene, går læreren rundt og hjelper. Elevene tar ofte kontakt med læreren fordi de står fast på en oppgave og trenger hjelp. Dersom det er rolig i klasserommet, og ingen signaliserer at det er behov for hjelp, går læreren rundt blant elevene og spør hvordan det går.

Et svært typisk kjennetegn på kommunikasjonen mellom læreren og elevene, er at læreren hjelper elevene med å løse matematikkoppgavene ved å gjøre dem oppmerksomme på hvilke regler de bør bruke. Følgende situasjon illustrerer det:

Situasjon 11:[14]

S.30	Emma:	Kan du hjelpe med en oppgave? Den oppgaven der.
S.31	Lærer:	Ja.
S.32	Emma:	Jeg vet ikke om jeg har gjort det riktig, men jeg tror jeg har gjort det.
S.33	Lærer:	Eh...x i andre. Opphøyd i minus tre. Da skal du bruke den regelen at du skal...
S.34	Emma:	Den? [peker]
S.35	Lærer:	Eh...nei. Bruk heller at du ganger sammen eksponentene når

[14] Emma arbeider her med oppgaven fra årsprøven presentert i delkapittel 4.2

		du har den varianten der.
S.36	Emma:	Men på den, så må vi bruke den regelen?
S.37	Lærer:	Jeg syns den regelen der er greiest å bruke helt til slutt.
S.38	Emma:	Å ja.
S.39	Lærer:	Det er bare for at du skal få et pent svar på den. Og at den skal se pen ut som sluttsvar. Så jeg syns du skal bruke andre regler og bare regne den helt ut i fra de standardreglene her [peker]. Og så ser du om sluttsvaret ditt blir x opphøyd i minus tre f.eks. Da ordner du det om og bruker den du viste meg.
S.40	Emma:	Ja.

Her er det min vurdering at kommunikasjonen mellom Emma og læreren kan klassifiseres som topazeeffekten. Emma tar først kontakt med læreren for å få hjelp til å løse en matematikkoppgave. Hun tror hun begynt riktig, men er usikker (linje S.30 til S.32). Læreren begynner straks å forklare hvilken regel Emma kan bruke (linje S.33). Allerede på dette stadiet i dialogen begynner læreren å fortelle Emma hvordan hun skal gå frem for å løse oppgaven. Jeg tolker data slik at hun gir en eksplisitt form for topazeeffekt, i form av en beskrivelse av ulike steg som eleven forventes å følge (Novotná & Hošpesová, 2007). Emma misforstår og tror at læreren snakker om en annen regel. Læreren presiserer da at Emma skal bruke regelen om at eksponentene skal ganges sammen (linje S.35). Igjen beskriver hun eksplisitt hvilken metode eleven skal bruke for å løse oppgaven. De fortsetter å diskutere regelen Emma ville bruke, og læreren forklarer at den kan brukes helt til slutt (linje S.37 og linje S.39). Jeg tolker data slik at læreren her gir en annen form for eksplisitt topazeeffekt: Hun advarer om mulige feil som kan bli begått (Novotná & Hošpesová, 2007). Dersom Emma får f.eks x opphøyd i minus tre som svar, advarer læreren om at hun må huske å ordne om på svaret (linje S.39). I følge Brousseau (1997) vil kunnskapen eleven trenger for å løse det matematiske problemet endres gjennom topazeeffekten. Jeg tolker data slik at det skjer her. Emma tar først kontakt med læreren for å få hjelp til en oppgave, som det krever en viss kunnskap for å løse. Læreren gjør henne så oppmerksom på hvilke ”standardregler” hun skal bruke (linje S.39). Emma trenger videre kun å bruke reglene; ikke å løse en oppgave. Dermed blir oppgaven redusert til kun å sette inn tall i en formel, og kunnskapen som er nødvendig for å løse den er endret.

Også i de tilfellene der elevene ikke kan bruke en eller flere gitte regler, hjelper læreren dem med å løse matematikkoppgavene ved å beskrive hvilken fremgangsmåte de kan bruke. At læreren enten peker på regler eller på annen måte beskriver fremgangsmåten for å løse oppgaven, er det mest typiske kjennetegnet på kommunikasjonen mellom lærer og elever. Hvordan læreren beskriver stegene som elevene forventes å følge vises i følgende situasjon:

Situasjon 12:[15]

S.41	Lærer:	Da var dere ferdige? Da skrev dere opp den nr 34?
S.42	Martin:	Ja, men jeg skjønte ikke hvorfor det ble det.
S.43	Lærer:	Hva det...hva du skulle finne.
S.44	Martin:	Det var sånn...hva er sannsynligheten for å få en sekser, var det ikke det?
S.45	Lærer:	For å få minst en sekser ja.
S.46	Martin:	Minst en sekser ja.
S.47	Lærer:	Mmm. Da er det å telle opp altså.
S.48	Livar:	Men altså, hvis du kaster to terninger, altså kaster en terning to ganger. Så kan du bare få to seksere.
S.49	Lærer:	Ja, du kan bare få to seksere ja. Men du...her var jo spørsmålet: Hva er sannsynligheten for at du får minst én sekser? Det betyr at du kan få en sekser, eller du kan få to seksere. Og da er det jo mange mulige...muligheter for å få en sekser. Du kan få sekseren først, du kan få sekseren som andre kast. Og da er det bare å telle opp det totale antall av dem som oppfyller kravet ditt.

Læreren tar kontakt for å se hvordan det går med elevene, og Martin har et spørsmål. De to kommer først i *kontakt*, og læreren *lokaliserer* at Martin har problemer med å finne sannsynligheten for å få en sekser (linje S.41 til S.44). Læreren presiserer at han skulle finne sannsynligheten for å få minst én sekser og forklarer at han bare skal telle opp (linje S.45 og S.47). Livar, som sitter ved siden av Martin, ser ikke ut til å skjønne det helt og mener at du bare kan få to seksere (linje S.48). Lærer presiserer igjen hva oppgaven egentlig handlet om og hvordan den kan løses (linje S.49). Det er altså ikke læreren som forsøker å skjønne Martins eller Livars perspektiv; de må forstå hennes. Hun tar ikke utgangspunkt i hva elevene har tenkt, eller hvor problemene deres ligger. I lokaliserings- eller identifiseringsfasen i IC-modellen kan det skje at dialogen tar en annen retning. I stedet for at læreren forsøker å sette seg inn i elevens oppfattelse av problemet, skjer det motsatte (Alrø & Skovsmose, 2002). Jeg tolker data slik at det her er Martin og Livar som må forstå lærerens perspektiv. Samtalen går dermed ut av noe som kunne blitt en IC-modell (Alrø & Skovsmose, 2002).

Allerede ganske tidlig i samtalen forteller læreren hvordan oppgaven skal løses. Martin og Livar trenger bare å telle opp (linje S.47). Hun beskriver fremgangsmåten elevene skal bruke

[15] Oppgaven som diskuteres er nr 9.34 som er presentert i delkapittel 4.2

for å løse oppgaven. Det er en eksplisitt form for topazeeffekt (Novotná & Hošpesová, 2007). I avslutningen av samtalen gjør hun det samme. Hun forklarer at sekseren kan fås først eller som andre kast. Elevene trenger bare å telle opp det totale antall av dem som oppfyller kravet (linje S.49). På den måten beskriver hun direkte alle nødvendige steg i fremgangsmåten for å løse oppgaven.

I noen tilfeller kan også læreren hjelpe elevene å komme frem til svaret på matematikkoppgavene ved å lede eller "trakte" dem gjennom en serie eksplisitte spørsmål. Følgende situasjon viser hvordan:

Situasjon 13:[16]

S.50	Lærer:	Hvordan går det?
S.51	Tor:	Den sannsynligheten for type fire...
S.52	Lærer:	31?
S.53	Tor:	Mmm.
S.54	Lærer:	Eh...der har du fått oppgitt hva sannsynligheten er for type 1, type 2 og type 3.
S.55	Tor:	Mmm.
S.56	Lærer:	Og da mangler du sannsynligheten for type 4. (pause) Hva sa jeg at hvis du la sammen alle sannsynlighetene, hva skulle du få da?
S.57	Tor:	(virker usikker) Mmm...antall utfall eller noe...?
S.58	Lærer:	Hvis du, eh...kaster en terning.
S.59	Tor:	Mmm.
S.60	Lærer:	Da har du seks mulige utfall. Alle er like sannsynlige. Og da blir det en sjettedel på alle.
S.61	Tor:	Mmm.
S.62	Lærer:	Hva får du hvis du summerer en sjettedel seks ganger? (pause, ingen reaksjon fra Tor) En sjettedel pluss en sjettedel. Sannsynligheten for ener er en sjettedel pluss sannsynligheten for toer er en sjettedel.
S.63	Tor:	[mumling]
S.64	Lærer:	Ja, jeg tenker på hva verdien blir jeg. Hvis du tar en sjettedel pluss en sjettedel pluss en sjettedel. Da får du...Se. P(ener) pluss P(toer) pluss P(tre) pluss P(fire). P(fem), P(seks) [skriver i Tors bok] En sjettedel pluss en sjettedel pluss en sjettedel pluss en sjettedel pluss en sjettedel pluss en sjettedel. Da har jeg tatt en sjettedel for alle. Hvor mye får du da? (pause) Beholde nevneren.
S.65	Tor:	[ser ned i boka, skriver] Seks sjettedeler.
S.66	Lærer:	Ja. Og det er...?
S.67	Tor:	En.
S.68	Lærer:	En hel ja. Så du vet at summen av alle sannsynligheten, summen av dem er en [læreren ser på klokka og erklærer at

[16] Oppgaven som diskuteres er nr 9.31 som er presentert i delkapittel 4.2

det er friminutt] .

Læreren tar først kontakt med Tor for å finne ut hvordan det går. Han står fast på en oppgave, og læreren orienterer seg om hva oppgaven handler om (linje S.50 til S.56). Læreren gjenkjenner at for at Tor skal kunne finne sannsynligheten for å trekke en sjokolade av type 4, må han først vite summen av alle sannsynlighetene. Hun starter derfor med å spørre Tor om hva summen blir (linje S.56). Tor virker usikker og tror det har noe med antall utfall å gjøre (linje S.57). Læreren registrerer at Tor svarer feil, men gir han ikke det rette svaret. I stedet lager hun et eksempel som gir Tor mulighet til selv å komme frem til svaret (linje S.58 til S.60). Her tolker data jeg data slik at læreren går inn i traktmønsteret. Tor svarer feil på spørsmålet: ”Hva er summen av alle sannsynlighetene?” Spørsmålet hun starter med er altså ikke spesielt åpent. Likevel er det min vurdering at kommunikasjonen har klare elementer fra traktmønsteret, siden oppfølgningsspørsmålene stadig snevres inn og blir enklere. Læreren forsøker å lede Tor frem til svaret gjennom å stille nye, mer eksplisitte spørsmål, noe som kjennetegner mønsteret (Bauersfeld, 1988). Hun beskriver at dersom Tor kaster en terning, er det seks mulige utfall. Alle er like sannsynlige; en sjettedel for hver (linje S.58 til S.60). Her er det min vurdering at hun forsøker å gi den nødvendige informasjonen slik at eleven kan komme med en passende reaksjon. Tor sier ingenting, så læreren fortsetter med å spørre hva han får om han summerer en sjettedel seks ganger. Tor gir fortsatt ingen respons (linje S.62). Læreren begynner da å skrive opp sannsynlighetene for hvert utfall i boka til Tor (linje S.64). Slik gjør hun oppgaven enda enklere. Til slutt gjenstår det at Tor skal summere en sjettedel seks ganger. Læreren minner ham til og med på å beholde nevneren (linje S.64). Endelig svarer Tor at det blir seks sjettedeler. Læreren leder ham videre til han svarer at det blir èn (linje S.67). I det Tor svarer ”èn”, avslutter læreren med å oppsummere at summen av sannsynlighetene alltid blir èn (linje S.68). Dialogen avsluttes ved at løsningen blir produsert, noe som alltid er tilfellet for traktmønsteret (Bauersfeld, 1988). Løsningen er i dette tilfellet kun på et delspørsmål i oppgaven, siden Tor og læreren blir avbrutt av at det er friminutt (linje S.68).

Traktmønsteret er en underkategori av topazeeffekten (Kang & Kilpatrick, 1992). Det mener jeg kommer tydelig frem i dialogen mellom læreren og Tor. Tor er i utgangspunktet usikker på hvordan han kan finne sannsynligheten for å trekke en sjokolade av type 4. Gjennom at læreren leder ham gjennom en serie eksplisitte, enkle spørsmål, reduseres oppgaven til å summere en sjettedel seks ganger. Kunnskapen som er nødvendig for å komme frem til svaret endres dermed (Brousseau, 1997).

Videre er det min vurdering at samtalen mellom læreren og Tor har elementer fra ”gjett hva læreren”-mønsteret. Tor virker svært usikker når læreren spør ham om summen av alle sannsynlighetene, og han gjetter bare noe (linje S.57). Videre konstruerer læreren eksempelet med terningene. Tor gir da ingen respons. Jeg tolker data slik at Tor må anstrenge seg for å følge lærerens tankegang. Han skjønner ikke nødvendigvis hensikten med spørsmålene, og for ham kan de virke usammenhengende. Av den grunn gjetter han bare eller lar være å svare. Det er typiske kjennetegn ved ”gjett hva læreren tenker”-mønsteret (Alrø & Skovsmose, 2002).

Et annet kjennetegn på kommunikasjonen mellom læreren og elevene, er at dersom noe er uklart for en elev, gir læreren en direkte forklaring. Hun får ikke nødvendigvis tak i nøyaktig hva som egentlig er problemet til eleven. I forklaringene viser hun ofte til tidligere løste oppgaver eller eksempel, slik følgende situasjon viser:

Situasjon 14:

S.69	Louise:	Du, på den, hvorfor ble det en todel?
S.70	Lærer:	Eh...fordi at, hvis du skriver opp de utfallene der.
S.71	Louise:	Ja, det går an å få gutt gutt, jente jente, gutt jente, jente gutt.
S.72	Lærer:	Ja. Og da er det to stykker som oppfyller det som står her. For her er det snakk om en gutt og en jente, det er ikke snakk om rekkefølgen.
S.73	Louise:	Ja.
S.74	Lærer:	Du kan godt få gutt først, eller jente først.
S.75	Louise:	Okei.
S.76	Lærer:	Og da er det to av fire.
S.77	Louise:	(virker usikker) Hmm, ja...okei.
S.78	Lærer:	Det blir det samme som med myntkasting, med kron mynt, mynt kron.
S.79	Louise:	Okei.

Louise har sett at fasitsvaret er en todel, men er usikker på hvorfor. Læreren ber Louise om å skrive opp de ulike utfallene, noe hun allerede har gjort (linje S.69 til S.71). Slik kommer læreren og eleven i *kontakt*, og læreren får et innsyn i hva eleven allerede har gjort. En mulig *lokalisering* starter. Læreren fortsetter samtalen med å forklare direkte hvorfor sannsynligheten for å få en gutt og en jente er en todel. Som i samtalen med Martin og Livar (situasjon 12) tar hun ikke utgangspunkt i hva eleven har tenkt, eller hvor problemet til eleven ligger. Louise lytter aktivt til læreren som forklarer (linje S.72 til S.76). Min vurdering er at det her er Louise som må forstå lærerens perspektiv, ikke motsatt. Dermed følger ikke samtalen lenger IC-modellen (Alrø & Skovsmose, 2002). Læreren avslutter med å kommentere at oppgaven er akkurat lik den med myntkasting (linje S.78). Hun peker på en analogi, i form av å vise til et tidligere løst problem (myntkasting). Slik gir hun en eksplisitt form for topazeeffekt (Novotná & Hošpesová, 2007). Her vises igjen det samme kjennetegnet ved kommunikasjonen mellom lærer og elev som jeg observerte i helklassesamtaler (situasjon 10): I forklaringer viser læreren til eksempler eller oppgaver som elevene har løst tidligere. Min tolkning er at det eksisterer en felles forståelse i klassen om at: Har du gjort noe tilsvarende før, gjør det på samme måte nå som da. Bruk samme regel eller fremgangsmåte, så har du løst oppgaven. Det er et eksempel på et nettverk av matematiske meninger, et tema, som kan eksistere i en klasse (Voigt, 1994; Voigt, 1995).

5.2.3 Oppsummering av kjennetegn på kommunikasjonen

Kommunikasjonen i helklassen kjennetegnes av at læreren stiller elevene presise spørsmål som de gir respons på. I hovedsak følger samtalene dermed IRE/IRF-mønsteret. Samtidig har læreren en tendens til å starte med en mer åpen matematikkoppgave, som hun deretter deler inn i enklere, eksplisitte spørsmål som elevene svarer på. Både situasjon 9 og 10 illustrerer det. Min vurdering er derfor at samtalene også har elementer fra traktmønsteret og topazeeffekten, der læreren leder dem frem til svaret gjennom å forenkle oppgavene. Læreren havner derimot ikke inn i ”gjett hva læreren tenker”-mønsteret i helklassesamtaler. Hun stiller enkelte spørsmål der det kan være vanskelig å få tak i hva hun vil frem til, slik som i situasjon 10, men hun omformulerer da raskt spørsmålet selv.

I samtaler med enkeltelever eller mindre grupper av elever, er det mest typiske kjennetegnet på kommunikasjonen at læreren forklarer hvordan elevene skal gå frem for å løse en oppgave. Hun peker enten på hvilke regler elevene skal bruke (situasjon 11), eller forklarer på annen måte fremgangsmåten elevene forventes å følge (situasjon 12). Slik gir hun en eksplisitt form for topazeeffekt. I enkelte tilfeller velger hun en annen strategi. I stedet for å forklare hvordan en elev skal løse en oppgave, leder hun ham frem til svaret gjennom en serie eksplisitte spørsmål. Da går kommunikasjonen inn i traktmønsteret, slik som i situasjon 13. Kommunikasjonen preges i de tilfellene også av ”gjett hva læreren tenker”-mønsteret, der eleven virker usikker på hva læreren egentlig vil frem til. Et annet kjennetegn på kommunikasjonen er at læreren gir en direkte forklaring dersom noe er uklart for eleven. I forklaringer viser hun ofte til tidligere løste oppgaver eller eksempler og gir dermed igjen en eksplisitt form for topazeeffekt. Min tolkning er at det eksisterer et matematisk tema i klassen om at to oppgaver er like dersom samme fremgangsmåte kan brukes. At læreren viser til oppgaver som er løst tidlligere, holder derfor som forklaring.

Et felles kjennetegn ved kommunikasjon mellom læreren og enkeltelever/mindre elevgrupper, er at hun har en tendens til å forenkle matematikkoppgavene for dem. Det gjør hun gjennom enten å peke på hvilke regler de skal bruke, beskrive fremgangsmåten, lede dem frem til svaret gjennom enkle spørsmål eller vise til tidligere løste oppgaver eller eksempler. Samtalene bærer derfor preg av topazeeffekten. Et annet felles kjennetegn er at hun ikke tar utgangspunkt i hva som er problemet til eleven, selv når han kommer til henne med et problem. Det vises i både situasjon 12 og 14. Siden det ikke er læreren som tar utgangspunkt i elevens perspektiv, men motsatt, har dermed ingen av samtalene blitt klassifisert som en IC-modell.

6. Diskusjon

I det følgende diskuterer jeg resultatene fra studien. Jeg starter med å kort oppsummere kjennetegn på kommunikasjonen mellom læreren og elevene i hver klasse og diskuterer resultatene opp mot tidligere forskning. Jeg sammenligner også resultatene fra de to klassene. Videre vurderer jeg studiens validitet og reliabilitet, i tillegg til å diskutere bruken av analyseverktøyet. I siste del av kapittelet ser jeg på hvilke forskningsspørsmål som kan være interessante å undersøke i et videre arbeid med studien.

6.1 Resultatene i studien og tidligere forskning

I kapittel 5 analyserte jeg dialoger som er typiske for hvordan læreren og elevene i hver klasse kommuniserer med hverandre. Gjennom analyse av data har jeg identifisert kjennetegn på kommunikasjonen mellom læreren og elevene i begge klassene.

6.1.1 Resultatene fra Kirkegata vgs

Læreren kommuniserer med hele klassen i to ulike deler av en undervisningsøkt: introduksjon til nytt stoff i starten og oppsummering mot slutten. I introduksjonsdelen kommuniserer læreren ofte med elevene gjennom IRE/IRF-mønsteret, men åpner likevel for at elevene kan stille egne spørsmål. Et annet kjennetegn på kommunikasjonen er at læreren i flere tilfeller havner inn i ”gjett hva læreren tenker”-mønsteret. I oppsummeringsdelen av undervisningsøkten ber læreren elevene om å fortelle hvilke mønster og systemer de har funnet i matematikkoppgavene. I tillegg til å kommunisere gjennom IRE/IRF-mønsteret, retter hun da gjerne fokus på et gitt aspekt ved en elevs løsning slik at kommunikasjonen følger fokuseringsmønsteret. Ingen av dialogene i datamaterialet har tydelige elementer fra traktmønsteret eller annen form for eksplisitt topazeeffekt. Derimot kan læreren betvile korrektheten i elevenes svar dersom de svarer galt, noe som er en implisitt form for topazeeffekt. I lærerens samtaler med enkeltelever eller mindre elevgrupper følger kommunikasjonen IC-modellen. Læreren *lokaliserer* elevenes perspektiv, *utfordrer* dem eller *forhandler* med dem om veien videre. Hun tar alltid utgangspunkt i hva eleven allerede har tenkt om oppgaven.

I følge Alrø og Skovsmose (2002) åpner en undersøkende matematikkundervisning for at nye kommunikasjonsmønstre kan oppstå. Forfatterne beskriver IC-modellen, et kommunikasjonsmønster som kjennetegnes av at læreren og eleven sammen utforsker et matematisk problem. Wood (1995; 1998) har videre observert at i en undersøkende matematikkundervisning vil læreren gjerne be elevene presentere sine løsninger foran klassen. Læreren kan da stille spørsmål for å snevre elevenes oppmerksomhetsfelt inn mot et gitt aspekt ved en elev løsning. I studien min har jeg funnet at i oppsummeringsdelen av undervisningsøkten kommuniserer læreren ofte gjennom fokuseringsmønsteret beskrevet av Wood (1995; 1998). I samtaler med enkeltelever eller mindre elevgrupper kommuniserer læreren gjennom mer eller mindre utviklede IC-modeller. Ingen av disse to kommunikasjonsmønstrene ble observert i den tradisjonelle matematikkundervisningen. Jeg har dermed funnet det samme som Alrø og Skovsmose: En undersøkende matematikkundervisning åpner for at nye mønstre kan oppstå.

Samtidig har analyse av data vist at læreren også kommuniserer med helklassen gjennom IRE/IRF-mønsteret og "gjett hva læreren tenker"-mønsteret. Begge kommunikasjonsmønstrene knyttes normalt til tradisjonell undervisning (Wells, 1999; Cazden, 2001; Alrø & Skovsmose, 2002). Voigt (1994) peker på at tradisjonelle mønstre er så stabile at de også kan observeres i undervisningssituasjoner som i utgangspunktet ikke følger en tradisjonell struktur. IRE/IRF-mønsteret kalles gjerne en "default option" – et spor kommunikasjonen går inn i om ingen foretar en bevisst endring (Cazden, 2001). I studien min har jeg funnet at tradisjonelle kommunikasjonsmønstre fortsatt eksisterer i en undersøkende matematikkundervisning. Det viser stabiliteten til slike mønstre. Spesielt interessant er det at læreren ofte havner inn i "gjett hva læreren tenker"-mønsteret. En mulig forklaring på det er at i en undersøkende matematikkundervisning vektlegges det at elevene skal få være aktive og utforskende. De skal selv få utvikle egne løsningsstrategier (Wæge, 2007). I de tilfellene der elevene forsøker å gjette hva læreren tenker, stiller hun gjerne veldig upresise spørsmål. Et eksempel er at hun spør om hva "det er med grana" og hva som blir registret på den (situasjon 2, delkapittel 5.1.1). Min tolkning er at hun ikke ønsker å lede elevene frem til et bestemt svar, men hun vet likevel hva hun ønsker at de skal svare. Elevene oppfatter at læreren søker gitte svar og begynner derfor å gjette.

6.1.2 Resultatene fra Storåsen vgs

I klassen som arbeider innenfor en tradisjonell matematikkundervisning, kommuniserer læreren med helklassen kun i introduksjonsdelen i starten av en undervisningsøkt. Læreren stiller lukkende, presise spørsmål, og kommunikasjonen foregår hovedsaklig gjennom

IRE/IRF-mønsteret. Samtidig har også dialogene elementer fra traktmønsteret og topazeeffekten. Læreren starter ofte med en mer åpen oppgave. Den forenkles så ved at læreren enten stiller spørsmål knyttet til hvordan den skal løses, eller selv forklarer de stegene som er nødvendige for å løse den. I samtaler med enkeltelever eller mindre elevgrupper er det mest typiske kjennetegnet at læreren forklarer hvordan elevene skal gå frem for å løse en matematikkoppgave. Hun peker på regler de bør bruke eller beskriver fremgangsmåten direkte. I andre tilfeller leder hun dem frem til svaret gjennom en serie enkle spørsmål eller viser til tidligere løste oppgaver eller eksempler. Det oppstår dermed en topazeeffekt. At læreren ofte peker på oppgaver elevene har løst tidligere i forklaringene sine, gjør at jeg tolker data som at det eksisterer et gitt matematisk tema i klassen: To oppgaver er like dersom samme fremgangsmåte brukes.

Det tredelte IRE/IRF-mønsteret bestående av lærerInitiering, elevRespons og lærerEvaluering/lærerFeedback er det kommunikasjonsmønsteret som forekommer oftest i tradisjonell undervisning (Cazden, 2001; Wells, 1999; Lemke, 1990). I studien min har jeg også funnet at læreren i klassen fra Storåsen vgs i stor grad kommuniserer med helklassen gjennom den tredelte dialogen. Hun stiller presise spørsmål som elevene gir respons på. Elevenes svar blir evaluert, i form av at læreren vurderer om svarene er riktige eller ikke. I tillegg følger hun ofte opp med nye spørsmål, slik at hun gir mer generell feedback.

Novotná og Hošpesová (2007) hadde i sin studie fokus på forekomsten av topazeeffekten i en matematikklasse. Forfatterne identifiserte ulike former for eksplisitt og implisitt topazeeffekt. I studien min er det spesielt én form for eksplisitt topazeeffekt som er dominerende: At læreren forklarer hvordan elevene skal gå frem for å løse matematikkoppgavene. Særlig i lærerens samtaler med enkeltelever, er det et svært typisk kjennetegn på kommunikasjonen. Noen av dialogene i datamaterialet mitt har også tydelige elementer fra traktmønsteret, som er en underkategori av topazeeffekten (Kang & Kilpatrick, 1992). I følge Steinbring (1998) oppstår ofte traktmønsteret på grunn av presset lærere føler i forhold til at hver matematikktime skal føre frem til et gitt mål. I klassen fra Storåsen vgs observerte jeg at det var stort fokus på oppgaveløsning, og på at elevene skulle arbeide frem mot heldagsprøven. Det kan forklare forekomsten av traktmønsteret og topazeeffekten i klassen. I tillegg observerte jeg at læreren hadde et klart fokus på hvordan elevene skulle løse oppgavene; hvilke fremgangsmåter de burde bruke. Gjennom forhandlinger ser det ut til at læreren og elevene har utviklet en felles forståelse om at to oppgaver er like dersom samme fremgangsmåte brukes for å finne svaret. Det er et eksempel på et matematisk tema, et nettverk av matematiske meninger, som kan utvikles gjennom et tematisk mønster (Voigt, 1995). At læreren peker på en lignende oppgave som er løst fra før, holder derfor som forklaring på hva elevene skal gjøre i oppgaven som diskuteres.

6.2 Sammenligning av kjennetegn på kommunikasjonen i de to klassene

Dersom jeg sammenligner kjennetegn på kommunikasjonen i de to klassene, ser jeg at det både er visse likheter, men først og fremst flere forskjeller. Begge lærerne starter en undervisningsøkt med introduksjon til nye begreper og evt. repetisjon av temaet fra forrige økt. I den delen av timen kommuniserer ofte begge to med elevene gjennom IRE/IRF-mønsteret. Forskjellen er at i klassen som arbeider innenfor en undersøkende matematikkundervisning, kan også kommunikasjonen gå ut av sporet ved at elevene stiller egne spørsmål. Det skjer svært sjeldent i den andre klassen; læreren har hele styringen på retningen på samtalene. Videre havner læreren fra Kirkegata vgs gjerne inn i ”gjett hva læreren tenker”-mønsteret, noe den andre læreren ikke gjør. Strukturen på klasseromsaktivitetene er også forskjellig i de to klassene. I klassen fra Kirkegata vgs avsluttes hver undervisningsøkt med en felles oppsummering. Da retter læreren gjerne fokus på en elevs løsning og kommuniserer gjennom fokuseringsmønsteret. Dette mønsteret ble ikke observert i det hele tatt i klassen fra Storåsen vgs; læreren ber ikke elevene forklare hvordan de har løst oppgavene.

Dersom jeg sammenligner kommunikasjonen mellom lærer og enkeltelever/mindre elevgrupper, finner jeg enda flere forskjeller. Læreren som arbeider innenfor en undersøkende matematikkundervisning tar alltid utgangspunkt i hva eleven selv har tenkt om en matematikkoppgave. Dersom eleven har vanskeligheter med å uttrykke det, stiller hun undersøkende spørsmål som: ”Hvorfor blir det sånn?”. Hun lytter aktivt mens elevene forsøker å forklare hva de tenker, og hun kommuniserer gjennom IC-modellen. Læreren som arbeider innenfor en tradisjonell matematikkundervisning forklarer derimot sine elever direkte hvordan de skal løse en oppgave. Det blir elevene som må forstå lærerens perspektiv; ikke omvendt. En annen forskjell er at det ofte oppstår en topazeeffekt i klassen fra Storåsen vgs. Læreren beskriver hvordan elevene skal gå frem for å løse en oppgave, viser til tidligere eksempler eller leder dem frem til svaret gjennom en serie enkle spørsmål. I klassen fra Kirkegata vgs velger læreren en annen strategi. Dersom elevene gjør en feil (f.eks. tipper på et galt mønster), lar hun dem heller gjør feil. Hun oppmuntrer dem da til å sjekke om mønsteret de tror stemmer, faktisk stemmer. Det oppstår dermed ingen topazeeffekt.

Som jeg har beskrevet i kapittel 4, er klasseromsdiskursen ulik i de to klassene. I klassen som arbeider innenfor en undersøkende matematikkundervisning preges klassen av en felles forventning om at elevene skal lete etter mønster og systemer. Elevene diskuterer ulike løsninger med hverandre, og læreren oppmuntrer elevene til å beskrive systemene de ser på sin egen måte. Deltakerne i klassen fra Storåsen vgs ser ut til å ha andre forventninger til hverandre. Klassen preges av en felles forventninger om at elevene skal løse mange oppgaver, både fra læreboka og fra årsprøven. Lærerens rolle er å presentere teori og hjelpe elevene med å løse oppgavene. I en klasse vil deltakerne kommunisere med hverandre ut fra de regler og forventninger de allerede har til hverandre (Bauersfeld, 1980; Bauersfeld, 1988; Voigt, 1994; Voigt, 1995). De eksplisitte og implisitte reglene for sosiale og matematiske samhandlinger i et gitt klasserom er en del av den didaktiske kontrakten (Wedege et al, 2006). I de to klassene er det altså ulikt innhold i den didaktiske kontrakten, som igjen ser ut til å påvirke kommunikasjonen mellom læreren og elevene.

6.3 Studiens validitet og reliabilitet

I etterkant av en studie er det naturlig å diskutere om det som er tenkt å måles, faktisk er det som blir målt. Hvor gyldig er egentlig resultatet? Og er resultatet konsistent? Vil det samme resultatet kunne fås igjen, på et annet tidspunkt og med andre forskere? Validitet er en betegnelse på hvor gyldig undersøkelsen er; hvor godt det lykkes i å måle det som er tenkt å måles. Reliabilitet er forbundet med målesikkerheten (Robson, 2002).

Mertens (2005) skiller mellom indre og ytre validitet. Indre validtet handler om studiens troverdighet. Det som kan svekke troverdigheten i studien min er at resultatene kan være avhengige av hvilke situasjoner som oppstår i akkurat de observerte timene. For eksempel kan dagsformen til læreren og elevene være med på å påvirke undervisningen. Samtidig kan også mine observasjoner som forsker føre til at jeg legger for stor vekt på enkeltepisoder eller spesielle hendelser, da det er vanskelig å få med seg alt som skjer i en undervisningsøkt. Et tiltak som kan øke troverdigheten er å bruke datatriangulering (Mertens, 2005). I mitt tilfelle benyttet jeg observasjon kombinert med lyd- og bildeopptak. Jeg hadde som tidligere nevnt også mulighet til å diskutere mine observasjoner med en annen forsker; altså bruke kryssjekking. Det vil også styrke troverdigheten i en studie (Mertens, 2005). Tidsperspektivet gjorde at jeg ikke kunne bruke flere tiltak for å sikre den indre validiteten. Det som kunne vært nyttig var å intervjue hver av de to lærerne og noen av elevene i hver klasse for å få dypere innsikt i hvordan kommunikasjonen normalt pleier å foregå.

Den ytre validiteten i en studie handler om studiens generaliserbarhet (Robson, 2002; Mertens, 2005). I kvalitativ forskning er det avgrenset hvor mye som kan overføres til andre situasjoner. Hensikten med studien min er å få dypere innsikt i hva som kjennetegner kommunikasjonen mellom læreren og elevene i to klasser: En klasse som arbeider innenfor en undersøkende matematikkundervisning og en som arbeider innenfor en tradisjonell matematikkundervisning. Målet er ikke å generalisere funnet til alle matematikklasser. Resultatene i studien kan overføres til andre situasjoner ved at lærere kan kjenne seg igjen i det som beskrives og kanskje dra nytte av det i egen undervisning (Mertens, 2005).

I tillegg til å diskutere studiens validitet, er det naturlig å drøfte reliabiliteten. Reliabilitet er som tidligere nevnt knyttet til målesikkerheten og påliteligheten; om jeg måler det jeg tror jeg måler (Robson, 2002). En trussel mot reliabiliteten i en studie er i følge Robsen (2002) *bias;* en forutinntatt holdning. Bias kan finnes hos både informanter og forskeren. Selv om det er viktig å informere deltakerne i studien om hva den omhandler, kan for mye informasjon føre til bias hos informantene. Deltakerne kan da endre sin normale adferd for å få et annet resultat (Robson, 2002; Thagaard, 2002). I studien min har jeg forsøkt å styrke reliabiliteten gjennom at jeg fortalte lærerne og elevene at jeg ville studere kommunikasjonen mellom dem, men spesifiserte ikke hva jeg fokuserte på eller hva som var mitt analyseverktøy. Min vurdering er at jeg ga dem nok informasjon om studien, men ikke for mye. Jeg mener derfor at lærernes og elevenes eventuelle bias ikke hadde noen påvirkning på resultatene.

Forskeren selv kan også ha bias. Det er viktig å være bevisst på, da forskeren selv er et instrument for datainnsamling i kvalitative studier (Robson, 2002). Min mening eller bakgrunn kan dermed ha innvirkning på datainnsamlingen, samt på analysen av datamaterialet. Før jeg gjennomførte observasjonen med lyd- og bildeopptak i de to klassene, hadde jeg satt meg inn i matematikkdidaktisk forskning som omhandler ulike kommunikasjonsmønstre i matematikklasserommet. Siden enkelte mønstre er knyttet opp mot tradisjonell matematikkundervisning mens andre knyttes til undersøkende undervisning, var det en viss fare for at jeg ville innta en forutinntatt holdning som kan ha påvirket både datainnsamlingen og analysen av data. For å unngå å la mine meninger og bakgrunn ha noen merkbar innvirkning på studien, har jeg forsøkt å holde meg så objektiv som mulig. Å være klar over egne verdier og oppfatninger og prøve å starte studien med et åpent sinn vil kunne styrke objektiviteten (Mertens, 2005; Robson, 2002). En fordel i forhold til reliabiliteten er også at jeg i hele datainnsamlingsfasen samarbeidet med en annen masterstudent. Etter at datainnsamlingen var over, kunne vi diskutere både våre inntrykk av klassene og de observasjonene vi hadde gjort. Dermed vil mine personlige meninger og tolkninger ha mindre betydning for resultatene. Et annet tiltak jeg har tatt for å styrke reliabiliteten i studien, er at jeg gjennom hele rapporten tydeliggjør resultatene og tolkningene mine ved å referere direkte til utdrag fra samtalene i de to klasserommene.

6.4 Vurdering av analyseverktøyet

I studien min har dialogene mellom læreren og elevene i hver klasse blitt analysert opp de ulike kommunikasjonsmønstrene presentert i delkapittel 2.3, 2.4 og 2.5. Flere studier har vist at kommunikasjonen mellom deltakerne i en klasse ofte går inn i visse spor eller mønstre (Bauersfeld, 1980; Voigt, 1994; Voigt, 1995; Bauersfeld, 1988; Mason, 1998). Det har jeg også funnet i min studie. I datamaterialet fra klassen ved Storåsen vgs fant jeg liten variasjon i måten læreren kommuniserte med elevene sine på. Topazeeffekten var det dominerende kommunikasjonsmønsteret, spesielt i lærerens samtaler med enkeltelever. I helklassesamtaler kommuniserte lærere stort sett gjennom IRE/IRF-mønsteret. Min vurdering er at analyseverktøyet var en velegnet metode for å beskrive kjennetegn på kommunikasjonen i klassen som arbeider innenfor en tradisjonell matematikkundervisning. I klassen fra Kirkegata vgs kommuniserte læreren med enkeltelever eller mindre elevgrupper gjennom IC-modellen beskrevet hos Alrø og Skovsmose (2002). Også her var det liten variasjon i måten hun snakket med elevene sine på. Helklassesamtalene var preget av IRE/IRF-mønsteret, "gjett hva læreren tenker"-mønsteret og fokuseringsmønsteret. Her var det større variasjon og dermed noe vanskeligere å identifisere typiske kjennetegn på kommunikasjonen. Å analysere dialoger opp mot kommunikasjonsmønstre fungerte altså godt for å finne kjennetegn på kommunikasjonen i hver klasse. Men i et videre arbeid med studien kunne det være nyttig å utvide analyseverktøyet noe. Jeg observerte at elevene i klassen fra Kirkegata vgs ofte stilte egne spørsmål. Selv om kommunikasjonen etter at elevene hadde stilt et spørsmål gjerne gikk inn i et annet mønster (slik som i situasjon 3, delkapittel 5.1.1), kunne det være interessant å utvide analyseverktøyet til beskrive akkurat det fenomenet: At elevene stiller egne spørsmål og styrer retningen på samtalene i helklassen.

6.5 Videre arbeid med studien

I studien min har fått jeg dypere innsikt i hvordan to ulike matematikklærere kommuniserer med elevene sine. Jeg har identifisert kjennetegn på kommunikasjonen mellom læreren og elevene i begge klassene. Som jeg har beskrevet i delkapittel 6.3, viser analysen av datamaterialet at det er visse forskjeller i kjennetegn på kommunikasjonen i hver klasse. I klassen som arbeider på en undersøkende måte med matematikk, kommuniserer læreren med enkeltelever/mindre elevgrupper gjennom IC-modellen. Hun hjelper elevene med å uttrykke sine matematiske tanker og ideer, gir dem utfordringer og bidrar med hint og veiledning. I klassen som arbeider innenfor en tradisjonell matematikkundervisning kjennetegnes kommunikasjonen av at det ofte oppstår en topazeeffekt. Læreren hjelper elevene med å løse matematikkoppgaver gjennom å peke på regler, beskrive fremgangsmåten eller leder dem frem til svaret gjennom en serie enkle spørsmål. I et videre arbeid med studien kunne jeg tenkt meg å gå mer i dybden på hva disse forskjellene skyldes. En interessant problemstilling kunne være: ”Hvilke faktorer påvirker hvordan en matematikklærer kommuniserer med elevene sine?”

7. Avslutning

Fokuset i studien min er på kommunikasjon mellom lærer og elever i matematikklasserommet. For å besvare problemstillingen: *"Hva kjennetegner kommunikasjonen mellom læreren og elevene i en klasse som arbeider innenfor en undersøkende matematikkundervisning, og i en klasse som arbeider innenfor en tradisjonell matematikkundervisning?",* ble det gjennomført en kvalitativ studie. Utvalget består av to ulike matematikklasser fra videregående skole. Den ene klassen arbeider på en undersøkende måte med matematikk, mens den andre arbeider innenfor en tradisjonell matematikkundervisning. Data ble samlet inn gjennom observasjon kombinert med lyd- og bildeopptak. Dialoger som er typiske for hvordan læreren og elevene i hver klasse kommuniserer med hverandre ble valgt ut fra det transkriberte videomaterialet. Dialogene ble deretter analysert opp mot ulike kommunikasjonsmønstre som kan observeres i matematikklasserommet. Analyseverktøyet består av tradisjonelle mønstre: IRE/IRF-mønster, topazeeffekten, traktmønster og "gjett hva læreren tenker"-mønster (Cazden, 2001; Wells, 1999; Lemke, 1990; Brousseau, 1997; Novotná & Hošpesová, 2007; Bauersfeld, 1988; Alrø & Skovsmose, 2002). Undersøkende mønstre som IC-modellen (Alrø & Skovsmose, 2002) og fokuseringsmønster (Wood, 1995; Wood, 1998), i tillegg til tematisk mønster (Voigt, 1994; Voigt, 1995) er også en del av analyseverktøyet. Samtidig var jeg åpen for mulighetene av å observere andre typer kjennetegn som ikke lar seg beskrive av noen av mønstrene.

Resultatene viser at i klassen som arbeider innenfor en undersøkende matematikkundervisning kjennetegnes kommunikasjonen i helklassen av både tradisjonelle og undersøkende kommunikasjonsmønstre. Læreren har ofte styringen på retningen på samtalene og kommuniserer gjennom IRE/IRF-mønsteret og "gjett hva læreren tenker"-mønsteret. Men elevene får også anledning til å stille egne spørsmål. I oppsummeringsdelen av undervisningsøktene retter læreren gjerne fokus på en eller flere elevers løsninger og kommuniserer gjennom fokuseringsmønsteret. Samtaler mellom læreren og enkeltelever eller mindre elevgrupper er mer eller mindre utviklede IC-modeller. Læreren tar alltid utgangspunkt i hva eleven selv har tenkt om det aktuelle problemet som diskuteres. Hun lokaliserer deres oppfattelse av oppgaven, utfordrer dem og tar del i deres utforskningsprosess.

Resultatene viser videre at i klassen som arbeider innenfor en tradisjonell matematikkundervisning har læreren en klar styring på kommunikasjonen i helklassen. I felles gjennomganger presenterer hun ofte elevene for gitte matematikkoppgaver. Hun leder dem deretter frem til svaret ved at hun stiller en serie spørsmål eller selv delvis beskriver fremgangsmåten elevene bør følge. Læreren kommuniserer hovedsaklig med elevene gjennom IRE/IRF-mønsteret, men samtalene har også elementer fra topazeeffekten og traktmønsteret. Lærerens samtaler med enkeltelever eller mindre elevgrupper preges av topazeeffekten. Det mest typiske kjennetegnet på kommunikasjon er at hun forteller direkte hvordan elevene skal gå frem for å løse matematikkoppgavene. Læreren kan i enkelte tilfeller også lede dem frem til svaret gjennom en serie enkle spørsmål, slik som er kjennetegnet for traktmønsteret. I forklaringer viser hun ofte til tidligere løste oppgaver eller eksempler. Min vurdering er at det eksisterer et matematisk tema (Voigt 1994; Voigt, 1995) i klassen om at to oppgaver er like dersom samme fremgangsmåte kan brukes. I hver klasse er det ganske liten variasjon i måten læreren kommuniserer med elevene sine. Kommunikasjonen følger gitte spor eller mønstre. Resultatene fra studien tyder derfor på at analyseverktøyet er godt egnet til å identifisere kjennetegn på kommunikasjonen mellom læreren og elevene i en klasse.

Studien bidrar til økt innsikt i og bevissthet rundt hvordan matematikklærere kommuniserer med elevene sine. Som Bauersfeld (1988) og Voigt (1995) påpeker er lærere selv ofte ikke klar over hvilke kommunikasjonsmønstre de utvikler i matematikkundervisningen sin. Lærere kan til og med kan gå inn i mønstre som strider mot deres hensikt, slik som traktmønsteret (Bauersfeld, 1988). For å unngå å havne inn slike mønstre, mener Mason (1998, s. 14) at lærere må ”catch yourself in the act” eller helst før de handler. Dersom læreren er bevisst på hvordan han kommuniserer med elevene sine, kan han klare å utvikle nye kommunikasjonsmønstre i klassen. Som jeg nevnte innledningsvis, kan læreren gjennom sin kommunikasjon både hemme eller fremme elevenes læring i matematikk (Alrø & Skovsmose, 2002). Jeg mener at en lærer som er bevisst på hvordan han kommuniserer med elevene sine lettere kan bruke samtalene til å fremme deres læring.

Resultatene fra studien min indikerer videre at det kan være relativt store forskjeller i hva som kjennetegner kommunikasjonen mellom læreren og elevene i to ulike matematikklasser. Som en mulig forlengelse av studien kunne det derfor være interessant å gå i dybden på hva forskjellene skyldes. En mulig problemstilling er å studere hvilke faktorer som påvirker hvordan en matematikklærer kommuniserer med elevene sine.

Referanseliste

Alrø, H., & Skovsmose, O. (2002). *Dialogue and learning in mathematics education. Intention, reflection, critique.* (Vol.29). London: Kluwer Academic Publications.

Balacheff, N. (1990). Towards a *problématique* for research on mathematics teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(4), 258-272.

Bauersfeld, H. (1980). Hidden dimensions in the so-called reality of a mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 11*, 23–41.

Bauersfeld, H. (1988). Interaction, construction, and knowledge: Alternative perspectives for mathematics education. In D. A. Grouws, T. J. Cooney & D. Jones (Eds.), *Effective mathematics teaching* (pp. 27-46). Reston, VA: NCTM & Lawrence Erlbaum.

Boaler, J. (1998). Open and closed mathematics: Student experiences and understandings. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(1), 41-62.

Boaler, J. (1999). Participation, knowledge and beliefs: A community perspective on mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics, 40*(3), 259-281.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics 1970-1990.* Edited and translated by N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Cazden. C. B. (2001). *Classroom discourse. The language of teaching and learning* (2 ed.) Portsmouth, NH: Heinemann.

Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1995). The teaching experiment classroom. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 17-24). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Cobb, P. (2000). The importance of a situated view of learning to the design of research and instruction. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 45-85). Westport, CT: Ablex Publishing.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2000). *Research methods in education* (5 ed). London, New York: Routledge Falmer.

Dysthe, O. (2001). Sosiokulturelle teoriperspektiv på kunnskap og læring. In O. Dysthe (Ed.), *Dialog, samspel og læring* (pp. 33-72). Oslo: Abstrakt forlag.

Forskningsetiske Komiteer (2006). Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi. Lastet ned 10.01, 2011, fra http://www.etikkom.no/no/Forskningsetikk/Etiske-retningslinjer/Samfunnsvitenskap-jus-og-humaniora/

Goos, M. (2004). Learning mathematics in a classroom community of inquiry. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(4), 258-291.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In v.d. Akker, K. Gravemeijer, S. McKenny & N. Nieveen (Eds.), *Educational Design research* (pp. 17-51). Oxon: Routledge.

Kang, W., & Kilpatrick, J. (1992). Didactic transposition in mathematics textbooks. *For the Learning of Mathematics*, *12*(1), 2-7.

Kvale, S., & Brinkmann, D. (2009). *Det kvalitative forskningsintervju* (2 ed.) Oslo: Gyldendal Akademisk.

Lemke, J. L. (1990). *Talking science: Language, learning and values.* Norwood, NJ: Ablex.

Mason, J. (1998). Asking mathematical questions mathematically. Lastet ned 10.01, 2011, fra http://people.math.jussieu.fr/~jarraud/colloque/mason.pdf

Mellin-Olsen, S. (1990). Oppgavediskursen. In G. Nissen & M. Blomhøj (Eds.), *Matematikundervisning og Demokrati. Initiativ vedr. Matematikundervisning* (pp. 47-64). Roskilde: IMFUFA, RUC.

Mertens, D. M. (2005). *Research and evaluation in education and psychology: Integrating diversity with quantitative, qualitative, and mixed methods* (2 ed.). Thousand Oaks: Sage Publications, Inc.

Novotná, J., & Hošpesová, A. (2007). What is the price of topaze? In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park & D.Y. Seo. (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4.* (pp. 25-32). Seoul: PME.

Oldervoll, T., Orskaug, O., Vaaje, A., Hanisch, F., & Hals, S. (2009). *Sinus 1T. Matematikk for VG1* (2 ed). Oslo: Cappelen Damm AS.

Ottesen, E. (2007). Det viktigste er læring. In R. Mikkelsen & H. Fladmoe (Eds.), *Lektor – adjunkt – lærer. Innføringsbok i praktisk-pedagogisk utdanning* (pp. 104-116). Oslo: Universitetsforlaget.

Robson, C. (2002). *Real world research* (2 ed.). Oxford: Blackwell Publishing.

Skovsmose, O. (2003). Undersøgelseslandskaber. In O. Skovsmose & M. Blomhøj (Eds.) *Kan det virkelig passe? Om matematiklæring* (pp. 143-158). København: L&R Uddannelse.

Steinbring, H. (1998). Elements of epistemological knowledge for mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 1,* 157-189.

Thagaard, T. (2002). *Systematikk og innlevelse. En innføring i kvalitative metoder (*2 ed). Bergen: Fagbokforlaget.

Voigt, J. (1994). Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 26,* 275-298.

Voigt, J. (1995). Thematic patterns of interaction and sosiomathematical norms. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 163-201). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Vygotsky, L.S. (1978). *Mind in society. The development of higher psychological processes*. Edited by M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner & E. Souberman. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Wedege, T., Skott, J, Wæge, K., & Henningsen, I. (2006). *Changing views and practices? A study of the KappAbel mathematics competition.* Trondheim: Norwegian Center for Mathematics Education.

Wells, G. (1999). *Dialogic inquiry: Towards a sociocultural practice & theory of education*. Port Chester, NY: Cambridge University Press.

Wood, D., Bruner, J., & Ross, S. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry, 17*, 89-100.

Wood, T. (1995). An emerging practice of teaching. I P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.) *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 203-227). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Wood, T. (1998). Alternative patterns of communication in mathematics classes: Funnelling or focusing? In H. Steinbring, M.G. Bartolini Bussi & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 167-178). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Wæge, K. (2007). *Elevenes motivasjon for å lære matematikk og undersøkende matematikkundervisning.* Trondheim: Norges Teknisk-Naturvitenskapelige Universitet (NTNU).

Yackel, E. (1995). Children's talk in inquiry mathematics classrooms. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 131-162). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.

Vedlegg 1 Samtykkeerklæring

Trondheim 14.3.2011

Til foreldre/foresatte for elever i 1T ved Kirkegata vgs/Storåsen vgs

Vi er to masterstudenter ved Lektorutdanning i realfag (Master, 5-årig) ved NTNU, og denne våren skriver vi masteroppgave innenfor matematikkdidaktikk. Anne Lise fokuserer i sin masteroppgave på kommunikasjon/interaksjon i matematikkundervisning, og ønsker å gjøre videoopptak av undervisningen. Hild Mari fokuserer på motivasjon i matematikk og ønsker å observere undervisningen i klassen, samt å gjennomføre intervju (med bruk av lydopptaker) med et utvalg av elevene.

Vi ber derfor om tillatelse til å kunne gjøre videoopptak, observasjon og intervju. Vi kommer til Kirkegata vgs/Storåsen vgs i uke [x] og ønsker å være til stede i timene [a] og [b]. Forutsetningen for tillatelsen er at alt innsamlet materiale blir behandlet med respekt og blir anonymisert så langt råd er, og at prosjektene ellers følger gjeldende retningslinjer for personvern. Det er naturligvis helt frivillig å delta og man kan til enhver tid trekke seg fra deltakelse uten å måtte oppgi noen grunn til det. Videoopptakene og observasjonen skal være basert på normale undervisningssituasjoner i klassen, og det vil bli lagt til rette for i minst mulig grad påvirke elevenes læring. Opptakene, observasjonsnotatene og materiale fra intervju vil kun bli sett av oss og veilederen vår ved NTNU. I materiale som skrives eller på annen måte presenteres for andre vil det ikke være mulig å spore tilbake til enkeltindivider ettersom involverte personer vil bli anonymisert. Etter at masteroppgavene er fullført, etter planen i løpet av våren, vil alt av innsamlet data bli slettet.

Dersom dere har spørsmål i forbindelse med prosjektene, ta gjerne kontakt med en av oss enten via e-post (hildmari@stud.ntnu.no, annelio@stud.ntnu.no) eller på telefon (Hild Mari: 97 76 15 42, Anne Lise: 90 64 59 52)

Vi håper at dere syns dette er viktig og interessant, og at vi kan få tillatelse til å gjennomføre videoopptak, observasjon og intervju. Vi ber dere fylle ut svarslippen nedenfor og levere den så fort som mulig til læreren.

På forhånd tusen takk!

Vennlig hilsen

Anne Lise Øvstebø Vesterdal og Hild Mari Kvikne

…………………………………………………………………………………………......

Samtykkeerklæring (stryk det som ikke passer)

Vi gir tillatelse/gir ikke tillatelse til at……………………………………….(elevens navn) kan delta i studiene og at innsamlet data fra videofilm, observasjon og intervju kan benyttes i masteroppgavene.

..........................(sted og dato) ....(signatur foreldre/foresatte)

……………………………....(signatur elev)

Derivasjon

Mål for opplæringen er at elevene skal kunne..

> *gjøre rede for definisjonen av den deriverte, bruke definisjonen til å utlede en derivasjonsregel for polynomfunksjoner og anvende denne regelen i funksjonsdrøfting.*

Forkunnskaper:

Gjennomsnittlig vekstfart:

Det forutsettes at elevene kjenner og kan beregne gjennomsnittlig vekstfart til en funksjon. Og at de er fortrolig med det grafiske bildet: Sekantens stigningstall er lik den gjennomsnittlige vekstfarten.

Momentan vekstfart:

Elevene må også kjenne begrepet momentan vekstfart, og vite at om de tegner en tangent i et punkt på en graf, vil tangentens stigningstall være lik den momentane vekstfarten.

Vær oppmerksom på benevningen på vekstfart.

Oppgave: Tangenter til krumme grafer

1. Tegn grafen til $h(x) = x^2$ i GeoGebra

   Tegn tangenter i flere punkter, for eksempel i x = 1, x = 2, x = 0, x = -1, og noter opplysningene i et skjema:

GeoGebra: Tegn f. eks grafen til $h(x) = x^2$. For å finne tangenten i x = 1, skriv i inntastingsfeltet: Tangent[1,h]

For å finne tangentens stigningstall, kan du se i algebravinduet på ligningen til tangenten (rett linje) eller du kan velge stigning og så klikke på linja (Stigning ligger på nedtrekksmenyen sammen med vinkler).

h(x) = x²		
Tangent i punktet	**Tangentens stigningstall**	**Systemet er ..**
x = 1		
x = 2		
x = 0		
x = -1		

Kan du gjette hva stigningstallet vil bli for tangenten i andre x-verdier, x = -2, x = 3, osv. ? Skriv det du gjetter i tabellen, og kontroller etterpå ved å tegne

2. Gjør samme undersøkelse med flere funksjoner:

$k(x) = - x^2$		
Tangent i punktet	**Tangentens stigningstall**	**Systemet er …**
x = 1		
x = 2		
x = 0		
x = -1		

$g(x) = x^2 + 3$		
Tangent i punktet	**Tangentens stigningstall**	**Systemet er …**
x = 1		
x = 2		
x = 0		
x = -1		

<table>
<tr><td colspan="3">f(x) = 2x²</td></tr>
<tr><td>Tangent i punktet</td><td>Tangentens stigningstall</td><td>Systemet er …</td></tr>
<tr><td>x = 1</td><td></td><td rowspan="7"></td></tr>
<tr><td>x = 2</td><td></td></tr>
<tr><td>x = 0</td><td></td></tr>
<tr><td>x = -1</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">a(x) = 3x²</td></tr>
<tr><td>Tangent i punktet</td><td>Tangentens stigningstall</td><td>Systemet er …</td></tr>
<tr><td>x = 1</td><td></td><td rowspan="7"></td></tr>
<tr><td>x = 2</td><td></td></tr>
<tr><td>x = 0</td><td></td></tr>
<tr><td>x = -1</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

Lag flere funksjoner selv og undersøk! Prøv å finne ut om regelen din stemmer i alle tilfeller

$b(x) = x^3$		
Tangent i punktet	**Tangentens stigningstall**	**Systemet er …**
x = 1		
x = 2		
x = 0		
x = -1		

$d(x) = x^4$		
Tangent i punktet	**Tangentens stigningstall**	**Systemet er …**
x = 1		
x = 2		
x = 0		
x = -1		

Oppgave: Å finne momentan veksthastighet = stigningstall til tangenter til grafer (forts.)

$b(x) = x^2 + x$			Sammenlign med $d(x) = x^2$ (fra forrige time)	
Tangent i punktet	**Tangentens stigningstall**	**System**	**Tangentens stigningstall**	**System**
x = 1				
x = 2				
x = 0				
x = -1				

$e(x) = x^2 + 2x$			Sammenlign med $f(x) = x^2$	
Tangent i punktet	**Tangentens stigningstall**	**System**	**Tangentens stigningstall**	**System**
x = 1				
x = 2				
x = 0				
x = -1				

$g(x) = 2x^2 + x$			**Sammenlign med $h(x) = 2x^2$**	
Tangent i punktet	**Tangentens stigningstall**	**System**	**Tangentens stigningstall**	**System**
x = 1				
x = 2				
x = 0				
x = -1				

$j(x) = 2x^2 + 3x$				
Tangent i punktet	**Tangentens stigningstall**	**System**	**Tangentens stigningstall**	**System**
x = 1				
x = 2				
x = 0				
x = -1				

Vedlegg 3 Oppgaver fra Sinus 1T, Storåsen videregående skole

EKSEMPEL

Vi kaster et pengestykke to ganger.

a) Hvor mange mulige utfall er det?

b) Finn sannsynligheten for at vi får én mynt og én krone.

Løsning:

a) Vi lar K stå for krone og M for mynt. Vi lar videre KM være utfallet først krone og så mynt. Med en slik skrivemåte har vi utfallene KK, KM, MK og MM.

Det er 4 mulige utfall.

Dette kunne vi også ha funnet ved regning. Ved første kast er det to mulige utfall. For hvert av dem er det to mulige utfall i andre kast. Tallet på kombinasjoner blir

$$2 \cdot 2 = \underline{\underline{4}}$$

b) Det er to gunstige utfall for én mynt og én krone, KM og MK. Sannsynligheten er

$$\frac{\text{antallet gunstige utfall}}{\text{antallet mulige utfall}} = \frac{2}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Oppgave 9.32

I klassen til Mia er det 15 elever. Av dem er det 10 jenter. Læreren trekker tilfeldig en elev som hun vil høre i leksa.
Finn sannsynligheten for at det blir ei jente.

Oppgave 9.33

Et par har to barn.
Finn sannsynligheten for at de har én gutt og ei jente.

Oppgave 9.34

Vi kaster en terning to ganger (eller to terninger én gang).

a) Finn ved regning hvor mange utfall vi har.

b) Skriv opp alle utfallene.

c) Finn sannsynligheten for å få minst én sekser.

d) Finn sannsynligheten for at summen av øynene skal bli 7.

247

Oppgave 9.51

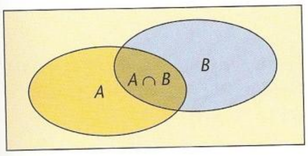
I Nordbygda bor det 42 kvinner og 48 menn. 2 av kvinnene og 8 av mennene er fargeblinde. Vi velger tilfeldig én person og definerer disse hendingene:

K: Personen er en kvinne
M: Personen er en mann
F: Personen er fargeblind

Regn ut $P(F)$, $P(F \mid M)$, $P(F \mid K)$ og $P(M \mid F)$.

Nå skal vi fram til en formel for betinget sannsynlighet og lar A og B være to hendinger i et utfallsrom med N mulige utfall. La A bestå av n utfall. Vi forutsetter at vi kan bruke en uniform sannsynlighetsmodell og får at

$$P(A) = \frac{n}{N}$$



Hendingen $A \cap B$ består av de utfallene som er med både i A og i B. La $A \cap B$ inneholde m utfall. Da er

$$P(A \cap B) = \frac{m}{N}$$

$P(B \mid A)$ er sannsynligheten for at B skal inntreffe når vi vet at A har inntruffet. Når A har inntruffet, er de mulige utfallene de samme som de n mulige utfallene i hendingen A. Hvis hendingen B skal inntreffe, må vi få et av utfallene i $A \cap B$. Dermed er det m gunstige utfall for hendingen B. Dermed er

$$P(B \mid A) = \frac{m}{n}$$

Nå ganger vi med $\frac{1}{N}$ i telleren og nevneren. Det gir

$$P(B \mid A) = \frac{m}{n} = \frac{m \cdot \frac{1}{N}}{n \cdot \frac{1}{N}} = \frac{\frac{m}{N}}{\frac{n}{N}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Vi har nå bevist denne formelen for den betingede sannsynligheten $P(B \mid A)$:

X

Vedlegg 4 Oppgaver fra årsprøven, Storåsen videregående skole

Årsprøve Sinus 1T

Våren 2007

DEL 1: Uten hjelpemidler

Tid: 2 timer

Oppgave 1

a) Regn ut.

1) $4-5(x+1)<2(1-x)$ 2) $\dfrac{1-\frac{1}{3}}{\frac{2}{5}+\frac{2}{3}}$ 3) $(x+y)^2-(x-y)(x+y)-2y(x-y)$

b) Regn ut.

1) $\dfrac{(2x)^2\cdot(x^2)^{-3}}{4\cdot x^{-3}}$ 2) $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}}{2\cdot 2^{\frac{1}{6}}}$

c) Løs likningssettet ved regning.

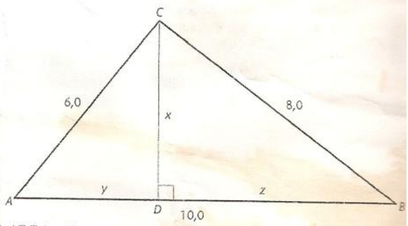
$$2x+3y=1$$
$$3x-y=-4$$

d) Gitt funksjonen $f(x)=\frac{2}{3}x^3-2x^2$

1) Finn nullpunktene til f.
2) Finn $f'(x)$.
3) Finn koordinatene til topp- og bunnpunktet til f.
4) Tegn en skisse av grafen.
5) Finn likningen for tangenten til grafen i $(3, f(3))$.

Oppgave 2

I trekanten ΔABC er $AC = 6{,}0$, $AB = 10{,}0$ og $BC = 8{,}0$. Fotpunktet for normalen fra C ned på linja gjennom A og B kaller vi D. Vi setter $CD = x$, $AD = y$ og $DB = z$.



a) Vis at ΔABC er rettvinklet.

b) Forklar at

1) ΔABC er formlik med ΔACD.
2) ΔABC er formlik med ΔCBD.

c) Finn x, y og z.

d) Vi kaller midtpunktet på BC for E.

1) Finn arealet av ΔABE.
2) Forklar, uten å regne, at ΔABE og ΔAEC har like store arealer.

CAPPELEN • ÅRSPRØVE 1T – STUDIEFORBEREDENDE PROGRAM