Undervisning –

Planlegging, prosess og produkt

Forfattere:

Svein H. Torkildsen

Ingvill Merete Stedøy

Publisert dato:

August 2017

Matematikksenteret
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen
Realfagbygget, NTNU, NO-7491 Trondheim

Planlegging, prosess og produkt

Å lære matematikk består i å lære ulike måter å tenke på, inkludert måter å generalisere matematiske ideer på, uttrykke og representere dem og begrunne at de er holdbare. Skal elevene lære seg matematisk tenking, forutsetter det at læreren ser på matematikk som et område der resonnering omkring matematiske ideer og sammenhengen mellom dem står sentralt. Å arbeide med matematikk innebærer å søke etter, identifisere og beskrive mønster, og å undersøke om hypoteser knyttet til mønstrene er holdbare (Carpenter, Franke & Levi, 2013). For at elevene skal ha mulighet til å utvikle sin matematiske tenking, må læreren velge aktiviteter som inviterer til utforsking og resonnering. Læreren må videre kunne identifisere matematiske ideer i elevenes tenking, og han må lede diskusjonen fram mot viktige matematiske ideer. Dette forutsetter en grundig planlegging og god gjennomføring av undervisningen.

Strukturen i denne artikkelen er inspirert av de fem praksisene som beskrives av Smith og Stein (2011). De fem praksisene er: 1. Forventning om hvordan elevene vil gripe an en oppgave (Anticipating), 2. Observere elevene i arbeid med oppgaven (Monitoring), 3. Velge hvilke elevarbeid som skal presenteres for klassen (Selecting), 4. Bestemme rekkefølge på presentasjonene (Sequencing), og 5. Søke etter sammenhenger (Connecting). I tillegg til disse punktene, tar vi opp momenter knyttet til planlegging av timen, presentasjon av aktiviteten og vurdering av undervisningen.

Alle eksemplene er hentet fra egen undervisning i matematikk 1T, R1 og R2. N

Planlegging

En grundig forberedt time gir økt mulighet for læringsutbytte hos elevene. Planleggingen innebærer fire prosesser: velge faglige mål for timen, velge aktivitet, tenke gjennom hvilke innspill elevene kan komme med og legge en strategi for hvordan læreren kan møte ulike innspill fra elevene.

Mål

Vi kan skille mellom «brede matematiske mål» som gjelder for arbeidet med et matematisk tema, og «spesifikke matematiske mål» som gjelder for hele eller deler av ei spesiell undervisningsøkt (NCTM, 2014).

Følgende er et eksempel på bredt matematisk mål: «Elevene skal kunne velge passende strategier for å løse en annegradslikning». Dette er et eksempel på et spesifikt matematisk mål: «Se etter mønster i andregradsuttrykk som x^2-4x, x^2-4x+5 og x^2-4. Diskutere faktorisering av andregradsuttrykk.»

Å presentere strategier for hverandre kan være en god måte å starte utviklingen av matematiske samtaler i klassen på. «Å lære å presentere strategier» er et eksempel på et *bredt matematisk mål* (Kazemi & Hintz, 2014).

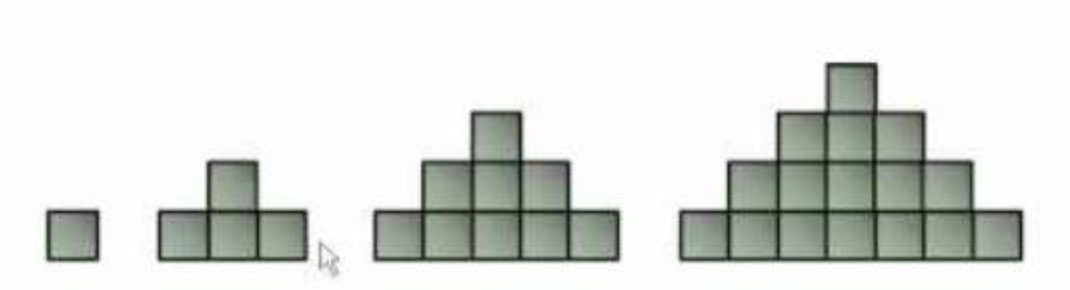
Lærer Siren registrerte at elevene i hennes i 1T brukte flere ulike strategier for å løse andregradslikninger av typen $x^2 - a = 0$. Hun bestemte seg for å sette fokus på når det er en god strategi å faktorisere, og når det er best å trekke ut kvadratrot. Hun satte dette *spesielle målet* for timen: «Tenke sammen om hvilken strategi vi bør velge når vi løser andregradslikninger. Spesielt, trekke kvadratrot når lineærleddet er 0 og faktorisere når konstantleddet er 0. Når må vi lete etter andre metoder?».

Et klart definert faglig mål vil styre valgene læreren gjør i sin forberedelse, tilpassingene i løpet av undervisningsøkta og refleksjonene læreren gjør seg i etterkant.

Selv om læreren alltid bør ha et klart matematisk mål for undervisningsøkta, er det likevel ikke alltid nødvendig å la elevene bli kjent med målet i begynnelsen av timen. Det er imidlertid viktig at elevene forstår hensikten med den matematikken det blir arbeidet med, og hvordan aktivitetene bidrar til at de lærer matematikk (NCTM, 2014).

Valg av aktivitet

Når målet for timen er satt, finner læreren en aktivitet som kan lede elevenes arbeid mot målet. Hvis tallfølger og mønstergjenkjenning er et mål for timen, kan et kvikkbilde være en metode. Bildene bør være enkle. Mer komplekse bilder fører ofte til at elevene ser så mye forskjellig i bildet at det blir vanskelig å holde retningen mot målet for timen. Lærer Thomas viste dette kvikkbildet til sine R2-elever:



Han spurte elevene om hvilket tallmønster de så og hvordan de tenkte. [1]

I artikkelen «Kvikkbilder» (Bondø, 2016) kan du lese mer om hvilke kvaliteter bildet bør ha for å framheve målet med aktiviteten. Artikkelen til Bondø har eksempler knyttet til grunnleggende tallforståelse. Men en oppgavestreng kan også være et hensiktsmessig utgangspunkt i arbeid med begreper og strategier som er relevant for matematikk i videregående skole. En oppgavestreng er et sett av relaterte matematikkoppgaver, utviklet for å støtte elevene i å konstruere begreper og sammenhenger i matematikk og utvikle egne strategier (Fosnot og Dolk 2002) (https://numberstrings.com/2016/03/30/number-string-structure-and-design/). Vi kommer tilbake med et eksempel på en oppgavestreng.

Det sentrale i valg av aktivitet er at den skal utfordre elevene på å resonnere omkring viktige matematiske ideer. Videre bør aktiviteten være utformet slik at det er mulig å nærme seg en løsning på ulike måter og gjennom ulike representasjoner. Det er utfordrende å holde trykket oppe når elevene arbeider med kognitivt krevende oppgaver. Denne utfordringen omtales nærmere i artikkelen «Kommunikasjon» som er et utdrag av masteroppgaven til Anne Lise Øvstebø Vesterdal (2011). Når elevene strever med å komme videre, bør læreren ha en plan som kan gi framdrift i arbeidet, uten å senke de kognitive kravene.

[1] For fullstendig beskrivelse av undervisningsopplegget se https://www.matematikksenteret.no/l%C3%A6ringsressurser/videreg%C3%A5ende/kvikkbilde-tallf%C3%B8lger

Forventning og undervisningsnotat

En viktig del av lærerens forberedelser er å forestille seg mulige svar fra elevene. Det kan være en fordel å notere vanlige misoppfatninger og å ha en plan for hvordan disse kan utfordres. Andre ganger vil det være aktuelt å forestille seg ulike strategier elevene kan tenkes å bruke når de skal løse et problem eller utføre beregninger.

Eksempel

Kari lot sin R1-klasse arbeide med dette problemet: Tre elever skal dele 26 drops. Hver elev skal ha minst et drops. På hvor mange måter kan elevene fordele dropsene?

Det faglige målet for timen var å komme fram til gode strategier for å løse, i utgangspunktet, uoversiktlige kombinatoriske problem.

Elevene fikk utdelt 26 tellebrikker. [2]

Hun forutså at elevene kunne benytte disse strategiene:

- Prøve å dele likt for deretter å flytte drops.
- La en elev få et drops og se hvor mange måter de to andre kunne dele 25 drops.
- Begynne med noen få drops og løse oppgaven for det enklere problemet, for deretter å utvide.
- Prøve å komme på en formel som de husket noe om fra ungdomsskolen.
- Dele opp i tilfeller der to får like mye mens en tredje får forskjellig, og de tilfellene der alle tre får forskjellig antall drops

Grundig arbeid med et plandokument for timen sikrer at læreren er best mulig forberedt til gjennomføringen. Plandokumentet bør inneholde faglig mål for undervisningsøkta, beskrivelse av aktiviteten, skisse av mulige elevsvar og hvordan elevsvarene kan integreres i diskusjonen om det faglige innholdet som leder mot målet for timen. I tillegg kan plandokumentet inneholde et kortere undervisningsnotat som læreren kan bruke som støtte i undervisningen for å holde retning og framdrift. Utformingen av plandokument og undervisningsnotat kan gjøres på mange måter og kan variere med valgt aktivitet. Utgangspunktet kan være følgende planleggingsmal som framhever punkter læreren bør tenke gjennom:

1. Velg og forbered en aktivitet ut fra et faglig mål.

[2] For fullstendig beskrivelse av undervisningsopplegget: https://www.matematikksenteret.no/l%C3%A6ringsressurser/videreg%C3%A5ende/deling-av-drops-et-kombinatorikkproblem

2. Tenk gjennom introduksjonen.
3. Hvilke elevsvar kan komme?
4. Hvilke elevsvar vil du bygge videre på?
5. Tenk gjennom hvordan du vil oppsummere.

Det kan også være lurt å utforme et kort undervisningsnotat til timen.

Eksemplet under viser et utdrag av undervisningsnotatet for Kvikkbildet «Figurtall». Det inneholder foruten selve kvikkbildet og en kort oversikt på samtaletrekkene, også en tabell med to kolonner:

«Progresjon for gjennomføring» og «Planlagt retning for diskusjon».

Progresjon for gjennomføring	**Planlagt retning for diskusjon**
Vis bildet i tre sekunder. TENKETID Vis bildet en gang til, i tre sekunder. TENKETID Vurder om du vil bruke SNU-OG-SNAKK	Det vil ikke være tid nok til å telle. Oppfordre elevene til å se en struktur i bildet. Se etter kjente mønster eller andre egenskaper ved bildet
Samtale om de mentale bildene elevene har laget seg: Hvordan utvikler mønsteret seg fra en figur til den neste? Hvordan tenkte du for å finne antall kvadrater? Ha figuren oppe, og marker på figuren. Utfordre elevene på hvordan vi kan skrive symbolsk det for eksempel Mari har tenkt. SAMTALETREKK	Dersom elevene svarer 1+3+5+7 osv, få elevene til å forklare hvordan de så at det var summer av oddetall. Hvis noen svarer kvadrattallene, få dem til å forklare hvordan de så det. Få fram ulike måter å se mønsteret og tallfølgene på, og koble bildet, den muntlige beskrivelsen og det symbolske uttrykket sammen. Markér i figuren, gruppér kvadratene eller markér dem etter elevens forklaringer. Utfordre elevene på symbolsk notasjon som beskriver tallfølgen i form av ett bokstavuttrykk.
…	…

Til andre typer aktivitet vil det være behov for andre momenter i undervisningsnotatet.

Prosess

Med utgangspunkt i planleggingsdokumentet leder læreren klassen fram mot målet for timen. Under gjennomføring av enkelte aktiviteter kan det være en fordel å stoppe opp og samle elevenes oppmerksomhet om en matematisk sammenheng eller en notasjon elevene ikke er kjent med, og som de kan utnytte videre i arbeidet. I eksempelet med figurtallene, kan læreren for eksempel introdusere vanlig skrivemåte for tallfølger: a_1, a_2, a_3, …

Læreren velger også om målet for timen skal presenteres før elevene starter arbeidet med oppgaven eller om det er bedre å gjøre det i løpet av undervisningsøkta. Hvis målet er at elevene skal se etter mønster og sammenhenger i en oppgavestreng, bør ikke selve målformuleringen frata elevene muligheten til å se nettopp det. Nedenfor er et eksempel på en oppgavestreng. Elevene skal få en og en oppgave av gangen, og klassen skal snakke om løsningene og tenkemåten før de går videre.

Eksempel

Matematikklærer Randi presenterte oppgavestrengen i ruta for elevene i 1T. Målet er å få elevene til se sammenhengen mellom potenser og logaritmer, og mellom potensregler og logaritmeregler.

1. *Skriv som potenser av 10:*

10000 =

100000000 =

1 =

0,001 =

2. *Bruk potensregler til å beregne produktet av to og to av tallene ovenfor.*

3. *Du vet at eksponenten er 3 og grunntallet er 10, hvilket tall er det?*

4. *Du vet at eksponenten i det ene tallet er 4 og i det andre tallet er -2.*

a) *Hva er eksponenten til produktet av tallene?*
b) *Hva er produktet av de to tallene skrevet uten potenser hvis*
   1) *Grunntallet er 10?*
   2) *Grunntallet er 2?*
   3) *Grunntallet er 3?*

c) *Hva er eksponenten til kvotienten mellom det første og det andre tallet?*
d) *Hva er kvotienten skrevet uten potenser hvis*
   4) *Grunntallet er 10?*
   5) *Grunntallet er 2?*
   6) *Grunntallet er 3?*

Eksponenten kalles logaritmen til tallet. For å vite hvilket tall det er, må du vite hva som er grunntallet. Vi skriver $log_g a$

Presentere aktiviteten og inspirere elevene

Når læreren har forsikret seg om at elevene har forstått hva oppgaven handler om, for eksempel konteksten oppgaven er knyttet til, eller hva de skal se etter eller undersøke, kan elevene oppfordres til å bruke ulike tilnærminger for å finne løsningen på oppgaven.

Eksempel

Lærer Helle gir følgende oppgave som en innledning til geometri i R1. Fire lys skal plasseres i et mønster på et flatt bord. De skal plasseres på en sånn måte at det bare kan være to forskjellige avstander mellom lysene. Tegn og forklar hvordan lysene kan plasseres. Forbered dere på å presentere løsningene og forklare for klassen hvorfor dere mener den er riktig.[3]

Når elevene arbeider med oppgavene, blir det lærerens oppgave å holde elevene på sporet, inspirere og utfordre dem uten å redusere de kognitive kravene.

Eksempel

Helle observerer elevene mens de jobber med lys-oppgaven. To av forslagene som har kommet fram, er «et lys i hvert hjørne på en likesidet trekant og det fjerde i sentrum for den omskrevne sirkelen» og «et lys i hvert hjørne på en likesidet trekant og det fjerde der høyden fra et av hjørnene treffer grunnlinja». Helle utfordrer elevene til å diskutere om begge løsningene er riktige, og begrunne standpunktet sitt. Hun ber dem også prøve å justere eventuelle feilsvar slik at de gir en riktig løsning. Hun sier: «Ideen med likesidet trekant kan være god. Tenk over ulike måter å plassere det fjerde lyset på, slik at løsningen tilfredsstiller kravene i oppgaven.»

Elevene kan komme med interessante innspill som det kan være nyttig å følge opp. Hvis innspillet bidrar til å nå målet for timen, kan det være naturlig å følge opp innspillet umiddelbart. Hvis innspillet fører til at undervisningen dreies bort fra målet, kan læreren i stedet notere seg elevens innspill og ta det opp igjen ved en senere anledning. Elevene skal

[3] For fullstendig beskrivelse av undervisningsopplegget se https://www.matematikksenteret.no/l%C3%A6ringsressurser/videreg%C3%A5ende/fire-lys-egenskaper-til-geometriske-figurer

få anerkjennelse for innspillet de kommer med, og når innspillet blir tatt opp ved en senere anledning, ser elevene at tankene og ideene de har blir tatt på alvor.

Observere

Mens elevene arbeider med oppgavene, bruker læreren tiden til å observere elevene. I denne fasen er det viktig at læreren utfordrer elevene på å klargjøre ideene sine slik at de blir tilgjengelige for andre. Oppfordring til å velge representasjoner som støtter opp om elevenes forklaringer, står sentralt i denne fasen.

Eksempel

Klassen til Helle var delt i grupper på 3-4 mens de arbeidet med problemet "Lysoppgaven". I løpet av den perioden elevene arbeidet med problemet, gikk Helle rundt og snakket med alle gruppene. Noen typiske utfordringer hun kom med: «Hvordan kan dere argumentere for at løsningen er riktig?», «OK, hvordan kan du overbevise de andre på gruppa di om det?». Under samtalen med gruppene registrerte Helle at elevene hadde ulike geometriske figurer som tilnærming til problemet. Ei gruppe tok utgangspunkt i likesidete trekanter. Ei annen gruppe tenkte på et kvadrat. Et tredje gruppe tok utgangspunkt i en sirkel.

I denne perioden kan det være nyttig for læreren å gjøre seg korte notater om elevenes bruk av strategier og forklaringer. Dersom læreren har laget en oversikt med mulige strategier under planleggingen, kan notater om elevenes arbeid gjøres enkelt i et skjema.
Det vil gi god oversikt over elevenes arbeid.

Eksempel

Kari observerte at det var minst fem ulike strategier i bruk da klassen arbeidet kombinatorikkoppgaven «fordeling av drops». I tillegg til de faglige målene, hadde hun også et overordnet mål: Å få elevene til å vurdere hvilke metoder som kan la seg generalisere, i motsetning til metoder som bare kan brukes i enkelttilfeller.

Martins gruppe hadde startet med en tabell for hver gang Martin får et bestemt antall drops:

Martin	1	1	1	1	1	1	1	1	1	…	1
Oda	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…	24

Nora	24	23	22	21	20	19	18	17	16	…	1

= 24 måter

Martin	2	2	2	2	2	2	2	2	…	2
Oda	1	2	3	4	5	6	7	8	…	23
Nora	23	22	21	20	19	18	17	16	…	1

= 23 måter

osv 24 + 23 + 22 + 21 + … + 1 måte

Petters gruppe hadde følgende notater:

8 – 8 – 10	10 – 10 – 6	9 – 9 – 7	7 – 9 – 10	9 – 10 – 7
8 – 10 – 8	10 – 6 – 10	9 – 7 – 9	7 – 10 – 9	10 – 7 – 9
10 – 8 – 8	6 – 10 – 10	9 – 9 – 7	9 – 7 – 10	10 – 9 – 7

2 like: 3 måter, 3 ulike: 6 måter

Gruppa til Johanne hadde ingen notater, men de diskuterte om det kunne være 26! Eller kanskje noe med 26! : 3! ?

Siris gruppe hadde begynt med 3 drops. Da er det 1 måte. 4 drops gir 1, 1, 2 på 3 måter. 5 drops gir 2, 2, 1 på 3 og 1,1,3 på 3 måter. Det vil si 6 til sammen.
De hadde lagd denne tabellen:

Antall drops	Antall måter
3	1
4	3
5	6

De diskuterte om de kunne se et mønster.

Hannes gruppe prøvde usystematisk å lage grupper med sum 26.

Victors gruppe hadde lagt alle 26 dropsene på en lang rekke med mellomrom mellom. Så hadde de funnet ut at problemet kunne løses ved å legge to fyrstikker i to av de 25 mellomrommet. Løsningen ville derfor være å bestemme på hvor mange måter du kan velge to ulike mellomrom når du har 25 å velge mellom. Det er $\binom{25}{2}$ forskjellige måter.

Strategi	**Hvem og hva**	**Rekkefølge**
Holde en konstant: 24 + 23 + 22 + 21 + … 1 muligheter	Martin: Har kommet fram til at løsningen må være summen av de naturlige tallene fra 1 til 24.	3

Forenkling: redusere antall drops og lete etter mønster. Trekanttall	Siri: Har begynt	4
Dele opp problemet i 2 like og en ulik kontra 2 ulike: Gir summer av 3-ere og 6-ere, men hvor mange av hver?	Petter: Har begynt	2
Huske formel: Dette er et problem de ikke har sett noen formel for å løse. Det finnes en formel: $\binom{25}{2}$	Johanne: Prøvde	
Annet: Usystematisk prøving	Hanne: Usystematisk prøving og telling	1
Binomialkoeffisient	Victor: Omgjøring av problemet til antall måter å velge ut to av 25.	5

Den siste linja – «Annet» – gir rom for å notere strategier læreren ikke har tenkt ut på forhånd. Etter observasjonene så skjemaet til Kari ut som vist over, med unntak av notatene på rekkefølge.

I noen sammenhenger kan det være gunstig å stanse elevene i diskusjonene og la dem dele noen av sine erfaringer og ideer med hele klassen. Det gjorde Kari i eksempelet med dropsene. Elevene fortalte hvordan de hadde begynt å prøve å løse problemet etter å ha holdt på i gruppene en stund. Det er viktig at dette ikke skjer for tidlig, for da kan gruppenes idéer som kunne blitt interessante, forlates til fordel for forslag fra noen av de andre gruppene. Her må læreren ta gode avgjørelser underveis.

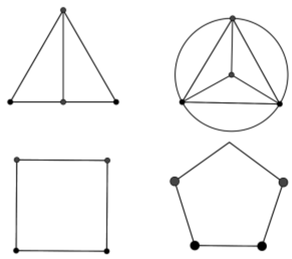
Velge

Noen ganger kan det være aktuelt å la alle elevgruppene presentere sine løsninger. Det kan være interessant hvis målet er å få fram at det er mange ulike måter å løse et problem på. I slike tilfeller vil det være nyttig å sammenlikne metodene med tanke på hvor effektive de er. Hvis flere av gruppene har like løsninger, velger læreren ut en gruppe for hver idé som skal diskuteres. Læreren passer på at alle elevene får være i aksjon over tid, men ikke nødvendigvis i samme økt.

Andre ganger vil noen måter å se et problem på lede oppmerksomheten bort fra målet for timen. Da bør læreren anerkjenne elevens innspill uten videre diskusjon, og eventuelt si at denne idéen skal tas opp på et senere tidspunkt.

Eksempler

Da klassen til Helle skulle diskutere ulike løsninger på lysoppgaven, fikk alle elevene presentere løsningene sine, uansett om de var riktige eller ikke. Her er en gjenskapning av noen av løsningene elevene kom med:



Hele klassen diskuterte etterpå hvilke forslag som tilfredsstilte kravene i oppgaven. Gjennom diskusjonene kom det fram viktige egenskaper ved geometriske figurer, både under diskusjonene om riktige og gale løsninger. Elevene i denne klassen var fortrolige med at feilsvar ofte førte til mye god læring.

I klassen til Randi var det en elev som sa han hadde hørt om noe som het den naturlige logaritmen. Randi roste henne og sa at det hadde hun rett i, og at det skulle tas opp på et senere tidspunkt.

Rekkefølge

Etter at læreren har valgt ut elevene som skal presentere sine løsninger, er det klart for å tenke gjennom hvilken rekkefølge presentasjonene skal komme i. En vel gjennomtenkt rekkefølge øker sjansen for at det faglige målet for timen blir framhevet.

Hvis mange elever har brukt samme strategi, anbefaler Smith & Stein (2011) at elevene presenterer denne strategien før de presenterer strategier som kun noen få elever har benyttet. Dette valget øker muligheten for at så mange som mulig av elevene deltar i starten av diskusjonen.

I klassen til Kari hadde elevene et variert utvalg av strategier å by på. Et forslag til rekkefølge på presentasjonene er vist i høyre kolonne i tabellen over.

Denne rekkefølgen går fra den minst avanserte strategien (usystematisk prøving og feiling) til den mest avanserte strategien (sammenlikning med ordnet tilfeldig utvalg).

Hensikten med dette valget av rekkefølge var å gi flest mulig elever tilgang til den sentrale matematiske ideen med ordnet tilfeldig utvalg. Dette utvalget gir også mulighet for å sammenlikne Martins strategi med Victors strategi. Kan metodene generaliseres? Kan de brukes for et annet antall drops? Kan de brukes for et annet antall elever som skal dele? Går

det an å finne formler? Det gir elevene mulighet for å utvikle en evne til å gå fra det spesielle til det generelle.

Produkt

Med produkt forstås i denne sammenheng den erfaringen og kunnskapen elevene sitter igjen med etter endt undervisning. Matematisk kompetanse kan ikke karakteriseres på en så enkel måte som fraværende eller tilstedeværende. Alle viktige matematiske ideer kan bli forstått på mange nivå og på mange måter. Kompetanse utvikles over tid. For hvert år elevene går på skole, må elevene bli mer kompetente i behandling av både gammelt og nytt innhold. En elev i R1 bør forstå funksjonsbegrepet bedre enn da eleven gikk i 1T. Men på hvert trinn bør elevene være i stand til å uttrykke matematisk kompetanse på en eller annen måte (Kilpatric & Swafford, 2002, side 21).

For å styrke utviklingen av elevenes matematiske kompetanse, bør undervisningsøkta avsluttes med en oppsummering som retter elevenes oppmerksomhet mot det faglige målet for økta. Vi trekker konklusjoner, reflekterer og blir bevisst egen læring, og det gjelder både elever og lærer. For å få alle elevenes innspill kan læreren bruke enkle sjekkspørsmål, og be elevene skrive svaret på et ark og holde opp. Han kan be alle forklare et begrep på en post-it-lapp og henge på tavla, eller han kan be elevene lage en logg og skrive på fagets plattform.

Søke etter sammenhenger

Læreren kan få mer ut av oppsummeringen enn at elevene presenterer sine strategier for hverandre. At elevene får vise arbeidet og fortelle om det til resten av klassen, er ingen garanti for at de utvikler en dypere forståelse. Resultatet kan like gjerne bli at de ikke har utviklet ny innsikt. Læreren kan hjelpe elevene til å sammenlikne ulike løsninger, utfordre dem på å vurdere konsekvensene av de ulike tilnærmingene, og han kan lede oppmerksomheten mot matematiske nøkkelbegrep. I stedet for å la oppsummeringen bestå av flere separate presentasjoner, kan læreren la presentasjonene bygge på hverandre slik at elevene kan utvikle kraftfulle matematiske ideer (Smith & Stein, 2011).

Oppgaven elevene får, bør gi mulighet for å arbeide med ulike representasjoner. Bruk av ulike representasjoner og oversetting mellom dem er både en del av og en vei til relasjonell forståelse (Skemp, 1987). I oppsummeringen bør læreren rette elevenes oppmerksomhet mot de ulike representasjonene og utfordre elevene på å oversette mellom dem. Elevene bør allerede fra de tidligste skoleårene utfordres til å beskrive og begrunne sin matematiske forståelse og resonnering ved hjelp av tegninger, diagrammer og andre representasjoner (NCTM, 2014).

Eksempler

I klassen til Kari var det viktig for klassen å sammenlikne løsningene til Martin og Victor.
Er virkelig $\binom{25}{2}$ det samme som 24 + 23 + 22 + 21 + … + 2 + 1? Selv om elevene i R1 ikke har om aritmetiske rekker, kan de gripe ideen om summen av minste og største, nest minste og nest største og så videre, og med litt hjelp fra Kari, kom de fram til at
$24 + 23 + 22 + 21 + \ldots + 2 + 1 = (24 + 1) \cdot 12$
Og når de har arbeidet med kombinatorikk har de sett at $\binom{25}{2} = \frac{25 \cdot 24}{2 \cdot 1}$.
Elevene klarte også å se at Victors metode kan utvides til n drops og m elever, med antall fordelinger lik $\binom{n-1}{m-1}$. De så at Martins metode kan utvides med n drops, men ikke umiddelbart med flere elever. Sammen med Kari kom de fram til at hans metode gir formelen $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ når det er n drops og 3 elever som skal dele.

Vurdering

Det primære formålet med vurdering er å danne seg et bilde

av hvor godt elevene får med seg det matematiske målet for timen og forbedre både lærerens undervisning og elevenes

læring. Vurderingen blir da en kontinuerlig prosess som er innbakt i undervisningen for å støtte elevenes læring og justere undervisningen etter elevenes respons. Ønsker læreren et godt bilde av elevenes matematiske forståelse, må ulike vurderingsstrategier og oppgaver tas i bruk. For å få kunnskap om hvilken begrepsforståelse elevene har, kan vi be elevene forklare begrepene til andre. De må kunne representere begrepene på flere måter, anvende kunnskapen til å løse både enkle og sammensatte problem, og de må kunne sette begrepene inn i en praktisk sammenheng (NCTM, 2014).

Mens Randi snakket med gruppene som arbeidet med oppgavestrengen om logaritmer, fikk hun god innsikt i elevenes forståelse av potensreglene. Flere elever hadde glemt definisjonen av potenser med negativ eksponent. Da utfordret Randi elevene til å forklare hverandre hva regelen var, og hvorfor det er naturlig å definere $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Som vi har sett i flere av eksemplene over, bruker elevene varierte strategier i arbeidet med en og samme oppgave. For å teste hvor mange av elevene til Kari som hadde forstått Victors forklaring, ga hun elevene i oppgave å tenke på hvordan de ville løse oppgaven hvis det var fire elever som skulle dele 26 drops. Elevene skulle levere et svar på dette før de forlot klassen. Resultatet av denne kontrollen ville være et godt utgangspunkt for planlegging av videre arbeid med kombinatorikk for klassen.

Referanser

Bondø, A. (2016). *Kvikkbilder i arbeid med tallforståelse.* Matematikksenteret. Hentet fra http://www.matematikksenteret.no/content/4791/Artikler

Carpenter, T. P., Franke, M. L. & Levi, L. (2013). *Thinking Mathematically. Integrating Arethmetic & Algebra in Elementary School*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Kazemi, E. & Hintz, A. (2014). *Intentional Talk*. *How to structure and lead productive mathematical discussions*. Portland, Oregon: Stenhouse Publishers.

Kilpatrik, J.& Swafford J. ed. (2002). *Helping Children Learn Mathematics*. Washington DC, National Academy Press.

NCTM (2014). *Principles to Actions. Ensuring Mathematical Success for All*.

Skemp, R. R. (1987). *Psychology of Learning Mathematics*. *Expanded American Edition*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.

Smith, M. S. & Stein, M. K. (2011). *5 Practices for Orhestresting Productive Mathematics Discussions*. Reston, VA: NCTM

Svingen, O. E. L. (2016). *Barns strategier i arbeid med tall*. Matematikksenteret. Hentet fra http://www.matematikksenteret.no/content/4791/Artikler

Vesterdal, A. L. Ø. (2011). *Kommunikasjon mellom lærer og elever i et undersøkende og et tradisjonelt matematikklasserom*. Trondheim, NTNU.